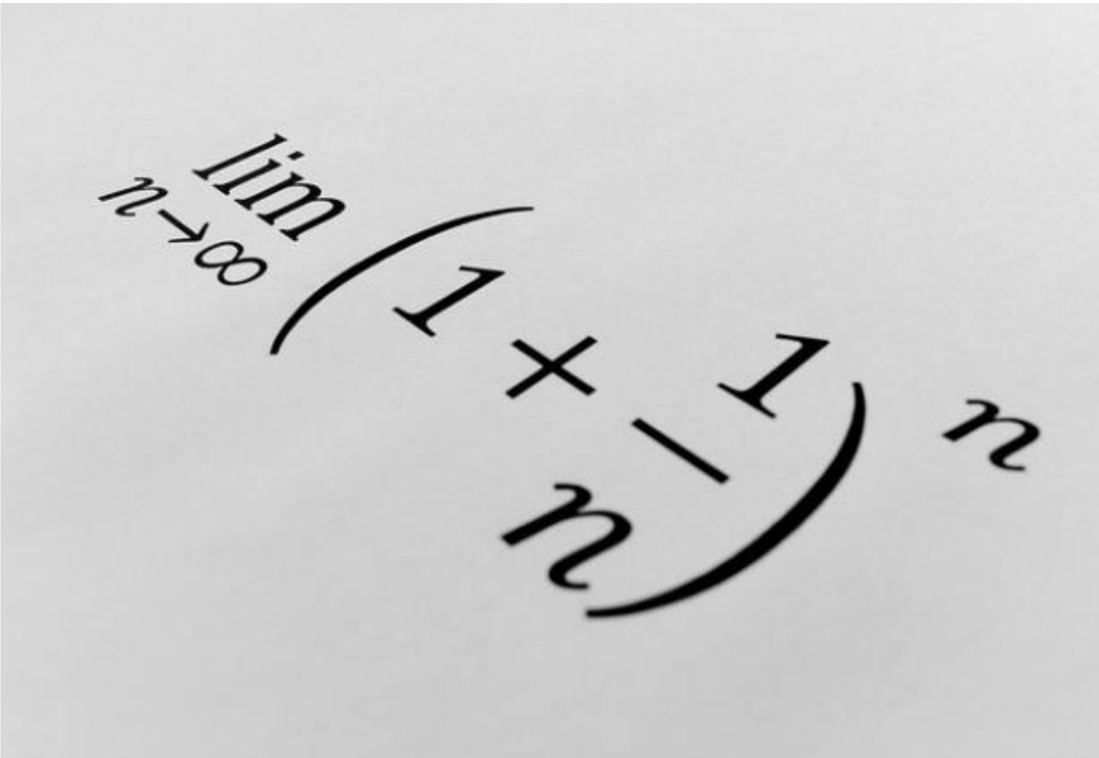
Cours d'Analyse II



Filière SMPC

Pr. Mohamed ZITANE

Année universitaire 2018-2019

Préface

L'objectif de ce document pédagogique est de permettre aux étudiants inscrits au deuxième semestre de la licence d'études fondamentales : Sciences de la matière physique chimie d'aquérir certaines notions de base en Analyse. Le polycopié est répartie en six chapitres, nous y présentons différents exercices de degré de difficulté variable, avec des solutions détaillées. Le lecteur y trouvera aussi des exercices supplémentaires sans corrigé.

Je tiens à remercier les collègues qui ont bien voulu juger le manuscrit et m'aider à l'améliorer. Il est possible que cette première version comporte quelques imperfections, je serais reconnaissant à tous ceux qui me ferait part de leurs remarques et suggestions.

Table des matières

Chapitre 1

Intégrale Simple

1.1 Primitive d'une Fonction

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On appelle primitive de f sur I, toute fonction F définie sur I telle que F est dérivable et $F'(x) = f(x) \quad$ pour tout $x \in I$.

Exemple 1. On a :

1. La fonction $x \mapsto \ln x + x^3 + x + 1$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x} + 3x^2 + 1$ sur $]0, +\infty[$.
2. La fonction $x \mapsto e^x - 1$ est une primitive de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2. *(Existence de Primitives)*
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors,

1. f admet une infinité de primitives sur I.
2. Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, alors la fonction $F_1 - F_2$ est constante.

Proposition 1. Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Soit a appartenant à I et b un réel. Alors il existe une et une seule primitive G telle que $G(a) = b$.

Preuve : On a vu qu'il existe une constante k telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x)+k$. D'où $G(a) = b$ si et seulement si $F(a) + k = b$ c'est à dire $k = b - F(a)$.

Exemple 3. : Il existe une unique primitive F de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 2$. En effet, les primitives de $x \mapsto x$ sont de la forme $x \mapsto \frac{x^2}{2} + k$ où k est un réel. $F(1) = 2$ impose donc $\frac{1}{2} + k = 2$ d'où $k = \frac{3}{2}$.

1.2 Intégrale d'une Fonction Continue

Définition 2. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur $[a, b]$.
On appelle intégrale de f de a à b, le réel noté $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ défini par :

$$\int_a^b f(t)\, dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque 4. 1. Le réel $\int_a^b f(t)\,dt$ ainsi défini ne dépend pas de la primitive choisie.

2. Dans l'écriture $\int_a^b f(t)\,dt$, la variable t est "muette", ce qui signifie que $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx = \dots$, le dx ou dt détermine la variable par rapport à laquelle on intègre la fonction : t ou x.

Proposition 2. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors,

1. $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$.
2. $\int_a^a f(t)\,dt = 0$.

Théorème 5. *(Théorème Fondamental de l'Analyse)*
Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Alors la fonction F définie sur I par :

$$F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Remarque 6. Une primitive de f sur I n'est pas nécessairement celle qui s'annule en un certain point, à titre d'exemple, la fonction exponentielle.

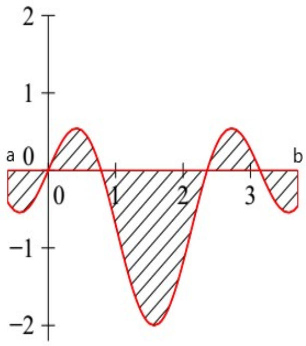
Remarque 7. Si f est une fonction bornée sur $[a, b]$ et continue sauf en un nombre fini de points de $[a, b]$ alors f est intégrable sur [a,b].
En particulier, si f est continue sur $[a, b]$ alors f est intégrable sur [a,b]. Par exemple, la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

est intégrable car elle est bornée et admet l'origine pour seul point de discontinuité.

1.3 Interprétation Géométrique

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
On appelle intégrale de a à b de la fonction f la mesure de l'aire en unité d'aire de la partie hachurée du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et la courbe $\mathcal{C}$. On note $\int_a^b |f(t)|\,dt$ cette aire.



Exercice 8. Calculer l'aire de la surface délimitée par la parabole $x \mapsto x^2$, pour $x \in [-1, 1]$.

1.4 Propriétés de l'Intégrale Simple

1.4.1 Linéarité

Proposition 3. Soient f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et α, β deux réels. Alors,

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\ dt = \alpha \int_a^b f(t)\ dt + \beta \int_a^b g(t)\ dt$$

1.4.2 Relation de Chasles

Proposition 4. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c des éléments de I. Alors,

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t)\ dt$$

Remarque 9. Les réels a, b, c ne sont pas nécessairement rangés dans l'ordre croissant.

Exercice résolu 10. Calculer $\int_{-2}^{2} |t-1|\ dt$.

Solution : En utilisant la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} |t-1| dt &= \int_{-2}^{1} |t-1|\ dt + \int_{1}^{2} |t-1|\ dt \\ &= \int_{-2}^{1} (1-t)\ dt + \int_{1}^{2} (t-1)\ dt \\ &= [t - \frac{t^2}{2}]_{-2}^{1} + [\frac{t^2}{2} - t]_1^2 \\ &= 5\end{aligned}$$

1.4.3 Intégrales et Inégalités

Proposition 5. *(Positivité de l'Intégrale)*
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$. Alors,

$$\int_a^b f(t)dt \geq 0.$$

Proposition 6. *(Croissance de l'Intégrale)*
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \leq g(t)$. Alors,

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

Proposition 7. Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$.

1. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = 0$, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in [a,b]$.
2. Si f n'est pas la fonction nulle sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt > 0$.

Proposition 8. *(Inégalité de Schwarz)*
Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Alors

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\ dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2\ dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\ dx\right).$$

Preuve : Pour tout réel λ, de $(\lambda f + g)^2 = \lambda^2 f^2 + 2\lambda fg + g^2$ on déduit

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2\ dx = \lambda^2 \int_a^b (f(x))^2\ dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)\ dx + \int_a^b (g(x))^2\ dx.$$

Soit $P : \lambda \mapsto \displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)^2$. C'est une fonction polynôme qui ne prend que des valeurs positives.
(i) Si $\displaystyle\int_a^b (f(x))^2\ dx \neq 0$, le polynôme réel P est de degré 2. Puisqu'il ne prend que des valeurs positives, son discriminent (réduit) est négatif ou nul :

$$\Delta' = \left(\int_a^b f(x)g(x)\ dx\right)^2 - \left(\int_a^b (f(x))^2\ dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\ dx\right) \leq 0.$$

(ii) Si $\displaystyle\int_a^b (f(x))^2\ dx = 0$, alors f^2 est la fonction nulle sur $[a,b]$, il s'en suit $fg = 0$ et alors $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\ dx = 0$, montre que l'inégalité est vraie avec égalité dans ce cas particulier.

Exercice 11. 1. Justifier que $(\forall k \geq 1)$, $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{dt}{\sqrt{t}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{k}}$. En déduire la nature de la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)_{n\geq 1}$.

2. Montrer par intégration successives que : $\forall t > 0, t - \frac{t^3}{6} \leq \sin t \leq t$, et calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin t - t}{t^3}$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(xt)\arctan(t)}{x^2 + t}\, dt = 0$.

1.4.4 Inégalité de la Moyenne - Formule de la Moyenne

Définition 3. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, $(a \neq b)$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le nombre réel μ_f défini par

$$\mu_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Proposition 9. *(Inégalité de la Moyenne)*
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors, il existe deux réels m et M tels que

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt \leq M.$$

Preuve : La fonction f étant continue sur $[a, b]$, alors, il existe deux réels m et M tels que

$$m \leq f(t) \leq M, \text{ pour tout } t \in [a, b].$$

par intégration, on obtient le resultat.

<u>Exercice résolu</u> 12. On admet que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$. Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_n^{n+1} f(x)\, dx$$

Prouver que pour entier naturel n, $f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$, puis en déduire que la suite (I_n) est convergente.
Solution : Soit n un entier naturel. Puisque f est décroissant sur $[0, +\infty[$, elle est sur $[n, n+1]$. Ainsi, pour tout réel $t \in [n, n+1]$, on a

$$f(n+1) \leq f(t) \leq f(n).$$

D'après l'inégalité de la moyenne, on a alors

$$f(n+1)(n+1-n) \leq \int_n^{n+1} f(x)\, dx \leq f(n)(n+1-n).$$

soit

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\, dx \leq f(n)$$

Constatons enfin que

$$\lim_{n \to +\infty} f(n+1) = \lim_{n \to +\infty} f(n) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

Par le théorème d'encadrement, on déduit que la suite (I_n) est convergente, et que sa limite vaut 0.

Corollaire 1. *(Inégalité des Accroissements Finis)*
Soit f une fonction dont la dérivée f' est continue sur un intervalle $[a,b]$.
S'il existe trois réels m, M et k tels que, pour tout x de $[a,b]$, on ait

— $m \leq f'(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$.
— $|f'(x)| \leq k$ alors $|f(b)-f(a)| \leq k(b-a)$.

Proposition 10. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors,

$$|\int_a^b f(t)\,dt| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Proposition 11. *(Première Formule de la Moyenne)*
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec g positive sur $[a,b]$. Alors, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt.$$

Corollaire 2. *(Formule de la Moyenne)*
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = f(c).$$

Proposition 12. *(Deuxième Formule de la Moyenne)*
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec f positive et décroissante sur $[a,b]$. Alors, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^c g(t)\,dt.$$

Exercice résolu 13. :Calculer la limite de $\displaystyle\int_a^{3a} \frac{\cos t}{t}\,dt$ lorsque a tend vers 0^+.

Solution : Pour $a>0$, $\frac{1}{t}$ est de signe constant sur $[a,3a]$. La première formule de la moyenne nous montre l'existence de $c \in [a,3a]$ tel que $\displaystyle\int_a^{3a}\frac{\cos t}{t}\,dt = \cos c\int_a^{3a}\frac{dt}{t}$.
En notant que $\displaystyle\int_a^{3a}\frac{dt}{t} = \ln|3a| - \ln|a| = \ln 3$, il vient $\displaystyle\int_a^{3a}\frac{\cos t}{t}\,dt = (\ln 3)\cos c$, avec $\cos c \in [\cos(3a), \cos a]$ et $\displaystyle\lim_{a\to 0}\cos a = \lim_{a\to 0}\cos(3a) = 1$, on obtient $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^{3a}\frac{\cos t}{t}\,dt = \ln 3$.

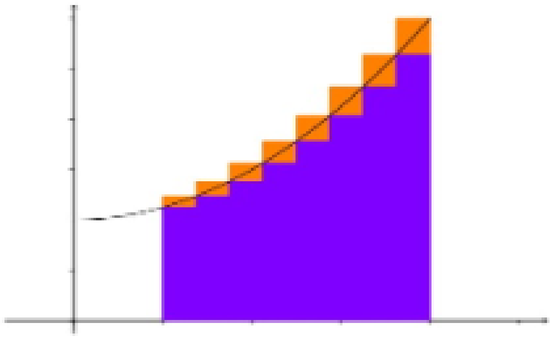
Exercice 14. Montrer que $\displaystyle\lim_{a\to 1^+}\int_a^{a^2}\frac{dt}{\ln t} = \ln 2$.

1.5 Sommes de Riemann

Définition 4. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Soit n un entier strictement positif. On note

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad S'_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Remarque 15. Les sommes $S_n(f)$ et $S'_n(f)$ représentent l'aire des rectangles associés à la fonction f lorsqu'on effectue un découpage régulier de l'intervalle $[a, b]$.



Théorème 16. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \lim_{n\to+\infty} S'_n(f) = \int_a^b f(x)\ dx$$

En particulier, si $f$est continue sur $[0, 1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)\ dx.$$

Exercice résolu 17. Calculer la limite de la suite $S_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+....+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

Solution : On a $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$, où f est la fonction définie et continue sur $[1, 0]$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
En prenant $a = 0$ et $b = 1$, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 \sqrt{x}\ dx = \frac{2}{3}$.

Exercice 18. Calculer la limite des suites de terme géneral suivant :

$$u_n = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}, \quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ke^{\frac{-k}{n}}, \quad w_n = \frac{1^3+2^3+....+n^3}{n^4}, \quad x_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(1+\frac{k}{n})\right)^{\frac{1}{n}}.$$

1.6 Calcul Intégral

1.6.1 Primitives des Fonctions Usuelles

1. $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\ dx = \ln|u(x)| + \text{cte}.$
2. $\displaystyle\int u'(x)e^{u(x)}\ dx = e^{u(x)} + \text{cte}.$
3. $\displaystyle\int u'(x)u^\alpha(x)\ dx = \frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + \text{cte}, \quad \alpha \neq -1.$

4. $\displaystyle\int u'(x)\cos(u(x))\ dx = \sin(u(x)) + \text{cte}.$

5. $\displaystyle\int u'(x)\sin(u(x))\ dx = -\cos(u(x)) + \text{cte}.$

6. $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\ dx = \arctan(u(x)) + \text{cte}.$

7. $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}\ dx = \arcsin(u(x)) + \text{cte}.$

8. $\displaystyle\int \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}\ dx = \arccos(u(x)) + \text{cte}.$

Exercice 19. Calculer les intégrales ou primitives suivantes :
$A = \displaystyle\int_1^e \frac{(\ln t)^2}{t}\ dt,\quad B = \int_0^1 \frac{e^t+1}{e^t+t}\ dt,\quad C = \int_0^x (2t+1)e^{t^2+t+2}\ dt \quad D = \int_1^x \frac{\cos(\frac{1}{t})}{t^2}\ dt,$
$E = \displaystyle\int_0^x \frac{\tan^3(3x)}{\cos^2(3x)}\ dt \quad F = \int_0^x \frac{t}{t+1}\ dt,\quad G = \int_0^2 \left|t^2-t\right|\ dt,\quad F = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tant\ dt.$

1.6.2 Intégration par Parties

Théorème 20. Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$. Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\ dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\ dx.$$

Preuve : On a : $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ donc

$$\int_a^b (uv)'(x)\ dx = [u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\ dx + \int_a^b u(x)v'(x)\ dx.$$

Exemple 21. : Calculons $\displaystyle\int_1^x ln(t)\ dt.$

On pose $u(t) = ln(t)$ et $v'(t) = 1$, donc $u'(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v(t) = t$.

Par conséquent, $\displaystyle\int_1^x ln(t)\ dx = [tln(t)]_1^x - \int_1^x\ dx = x\ln x - x + 1.$

Exercice 22. En utilisant l'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :
$A = \displaystyle\int_1^e t^n \ln(t)\ dt,\quad B = \int_0^1 t^3 e^{t^2}\ dt,\quad C = \int_0^\pi e^t\cos(2t)\ dt,\quad D = \int_1^e t(\ln t)^2\ dt.$

1.6.3 Intégration par Changement de Variables

Théorème 23. Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une fonction de classe C^1 avec $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. Alors

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\ dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\ dt.$$

La transformation $x = \varphi(t)$ s'appelle changement de variable.

Preuve : Si F est une primitive de f alors

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Donc

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int_{\alpha}^{\beta} (F \circ \varphi)'(t)\ dt = [(F \circ \varphi)(t)]_{\alpha}^{\beta} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\ dx = \int_{a}^{b} f(x)\ dx.$$

Remarque 24. On doit effectuer les trois substitutions suivantes :

1. $x = \varphi(t)$,
2. $dx = \varphi'(t)dt$,
3. On change les bornes d'intégration.

Remarque 25. Si F est une primitive de f alors

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = F(\varphi(t)) + C, \quad C \in\ R.$$

Exemple 26. Soit à calculer $\int_{-\sqrt{\pi/2}}^{2\sqrt{\pi/2}} 2t\cos(t^2)\ dt$. On choisit le changement de variable $\varphi(t) = t^2$, et donc $\varphi'(t) = 2t$ avec t variant de $-\sqrt{\pi/2}$ à $2\sqrt{\pi/2}$. Par conséquent, $\varphi(t)$ varie de $\pi/2$ à 2π (φ est de classe C^1 et cos est bien continue sur $\varphi\left(\left[-\sqrt{\pi/2}, 2\sqrt{\pi/2}\right]\right) = [0, 2\pi]$) :

$$\int_{-\sqrt{\pi/2}}^{2\sqrt{\pi/2}} 2t\cos(t^2)\ dt = \int_{-\sqrt{\pi/2}}^{2\sqrt{\pi/2}} \varphi'(t)\cos(\varphi)\ dt = \int_{\pi/2}^{2\pi} \cos x\ dx = [\sin x]_{\pi/2}^{2\pi} = 0 - 1 = -1.$$

Exercice résolu 27. Calculer $I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\ dt$ et $\int \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\ dx$

Solution : Pour la première intégrale, on pose $t = \sin(x)$ donc $dt = \cos(x)\ dx$. Ainsi $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(x)}\cos(x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\ dx = \frac{\pi}{4}$.

Pour la deuxième intégrale, on effectue le changement de variable suivant : $t = \cos(x)$ d'où $dt = -\sin(x)\ dx$ et donc on a : $J = \int \frac{-dt}{1+t^2} = -\arctan(t) + c = -\arctan(\cos(x)) + c$.

Exercice 28. En utilisant l'intégration par changement de variable, calculer les primitives suivantes :

$$F(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}, G(x) = \int \frac{1}{t(t+1)}\ln(\frac{t}{t+1})\ dt, H(x) = \int \frac{\cos(x)}{\sin^2 x + 4\sin x + 13}\ dx.$$

Exercice 29. Calculer la primitive $F(x) = \int \frac{x}{(x^2+1)(x^2+2)}\ dx$, poser $y = x^2$.

Proposition 13. Soit $a > 0$ et soit f une fonction continue sur $[-a, a]$.

1. Si f est paire, alors on a $\int_{-a}^{a} f(t)\ dt = 2\int_0^a f(t)\ dt$.
2. Si f est impaire, alors on a $\int_{-a}^{a} f(t)\ dt = 0$.

Exemple 30. $\int_{-1}^{1} \frac{e^t - e^{-t}}{\ln(1+t^2)}\ dt = 0$ et $\int_{-2}^{2} |t|\ dt = 2\int_0^2 t\ dt = 2$.

1.6.4 Intégrale des Fonctions Rationnelles

Pour intégrer une fonction rationnelle de la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont deux polynômes réels, on effectue la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[x]$ et puis on intégre chaque élément obtenu ; c'est à dire la partie entière, les éléments de première espèce et de seconde espèce suivants :

— **Calcul de** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$, on a :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \text{cte} & \text{si } n \neq 1, \\ \ln|x-a| + \text{cte} & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

— **Calcul de** $\displaystyle\int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2+bx+c)^n}\, dx,$ **avec** $b^2 - 4c < 0.$

On écrit $x^2 + bx + c$ sous la forme $(x-p)^2 + q^2 \quad (q \neq 0)$ et on fait le changement de variable $x = p + qt$. On obtient

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2+bx+c)^n}\, dx = \alpha' \int \frac{t}{(t^2+1)^n}\, dt + \beta' \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\, dt$$

On pose $I_n = \displaystyle\int \frac{t}{(t^2+1)^n}\, dt$ et $J_n = \displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)^n}\, dt.$

Calcul de I_n :

$$I_n = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{(t^2+1)^n}\, dt = \begin{cases} \frac{-1}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \text{cte} & \text{si } n \neq 1, \\ \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \text{cte} & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Calcul de J_n :

Pour $n = 1, \quad J_1 = \displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\, dt = \arctan t + \text{cte}.$

Maintenant on va calculer J_{n+1} en fonction de J_n par une intégration par parties. Pour $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} J_n &= \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\, dt = \int \frac{1}{(t^2+1)^n}(t)'\, dt \\ &= \left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right] + 2n\int \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}}\, dt \\ &= \left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right] + 2n\left(\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{n+1}}\, dt - \int \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}}\, dt\right) \\ &= \left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right] + 2n\Big(J_n - J_{n+1}\Big) \end{aligned}$$

Donc,

$$J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} J_n + \frac{1}{2n}\left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right], \quad n \geq 2.$$

Exercice résolu 31. Calculer $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2-x-2}\, dx$

Solution : On a $\deg(x^3+1) > \deg(x^2-x-2)$. On effectue la division euclidienne de x^3+1 par x^2-x-2, on obtient

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x-2)+3x+3$$

D'où

$$\frac{x^3+1}{x^2-x-2} = x+1+\frac{3x+3}{x^2-x-2}.$$

Comme le polynôme x^2-x-2 a deux racines -1 et 2, alors

$$\frac{x^3+1}{x^2-x-2} = x+1+\frac{3x+3}{(x+1)(x-2)} = x+1+\frac{3}{x-2}.$$

Donc,

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-x-2}\,dx = \frac{x^2}{2}+x+3\ln|x-2|+\text{cte}.$$

Exercice résolu 32. Calculer $\displaystyle\int \frac{x-7}{(x^2+4x+13)^2}\,dx$

Solution : On a $\deg(x-7) < \deg(x^2+4x+13)$. Le polynôme $x^2+4x+13$ n'a pas de racines réelles car $\Delta < 0$.
On écrit $x^2+4x+13$ sous la forme $(x-p)^2+q^2$. Un simple calcul donne
$x^2+4x+13 = (x+2)^2+3^2$, on fait le changement de variable $x = 3t-2$, alors

$$\begin{aligned}\int \frac{x-7}{(x^2+4x+13)^2}\,dx = \int \frac{x-7}{((x+2)^2+3^2)^2}\,dx &= \frac{1}{9}\int \frac{t-3}{(t^2+1)^2}\,dt\\ &= \frac{1}{9}\int \frac{t}{(t^2+1)^2}\,dt - \frac{1}{3}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt\end{aligned}$$

On a

$$\int \frac{t}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{-1}{2}\left[\frac{1}{t^2+1}\right]+\text{cte}.$$

Pour calculer $\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt$, on calcule $\displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$ en utilisant une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \int \frac{1}{t^2+1}(t)'\,dt = \left[\frac{t}{t^2+1}\right]+2\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt\\ = \left[\frac{t}{t^2+1}\right]+2\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt-2\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt\\ = \left[\frac{t}{t^2+1}\right]+2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt-2\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt.\end{aligned}$$

Donc,

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{t^2+1}\right]+\frac{1}{2}\arctan t+\text{cte}.$$

On remplace t par $\frac{x+2}{3}$, on obtient

$$\int \frac{x-7}{(x^2+4x+13)^2}\,dx = \frac{-x-3}{2(x^2+4x+13)}-\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{x+2}{3}\right)+\text{cte}.$$

1.7 Applications

Soit f une fonction rationnelle. Les intégrales suivantes se ramènent aux intégrales des fonctions rationnelles.

1 - Intégrale de la forme $\int f(e^x)\ dx$:

On pose $t = e^x$ alors $x = \ln t$ et $dx = \frac{1}{t}dt$. On a donc,

$$\int f(e^x)\ dx = \int \frac{f(t)}{t}\ dt.$$

Exemple 33. $\int_0^1 \frac{e^x - e^{3x}}{1+e^x}\ dx = \int_1^e \frac{\frac{t-t^3}{1+t}}{t}\ dt = \dots$

2 - Intégrale abélienne $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\ dx, \quad ad - bc \neq 0$:

on pose $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, alors $x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}$ et $dx = n\frac{ad-bc}{(ct^n-a)^2}t^{n-1}$.

Exercice résolu 34. Calculer $I = \int \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\frac{dx}{2x-1}$

Solution : on pose $t = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$, alors $x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$ et $dx = \frac{4t}{(t^2+1)^2}\ dt$, ce qui donne $I = \int \frac{4t^2dt}{(t^2-3)(t^2+1)}$.

En décomposant en éléments simples :

$$\frac{4u}{(u-3)(u+1)} = \frac{3}{u-3} + \frac{1}{u+1} \Rightarrow \frac{4t^2}{(t^2-3)(t^2+1)} = \frac{3}{t^2-3} + \frac{1}{t^2+1}.$$

Donc $I = \int \frac{3}{t^2-3}\ dt + \int \frac{1}{t^2+1}\ dt$ et le reste est évident.

3 - Intégrale de la forme $\int f(\cos x)\sin x\ dx$:

On pose $t = \cos x$, alors $dt = -\sin x\ dx$, donc $\int f(\cos x)\sin x\ dx = -\int f(t)\ dt$.

Ou bien, de $t = \cos x$ on a $x = \arccos t$, $dx = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt$ et $\sin x = \sqrt{1-t^2}$. Parconséquent,

$$\int f(\cos x)\sin x\ dx = -\int f(t)\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\ dt = -\int f(t)\ dt.$$

Exemple 35. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)\sin(x)}{\cos^2(x)+\cos(x)+2}\ dx = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{t}{t^2+t+2}\ dt = \dots$

4 - Intégrale de la forme $\int f(\sin x)\cos x\ dx$:

On pose $t = \sin x$, alors $dt = \cos x\ dx$, donc $\int f(\sin x)\cos x\ dx = \int f(t)\ dt$.

Ou bien, de $t = \sin x$ on a $x = \arcsin t$, $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt$ et $\cos x = \sqrt{1-t^2}$. D'où,

$$\int f(\sin x)\cos x\ dx = \int f(t)\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\ dt = \int f(t)\ dt.$$

Exemple 36. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)\cos(x)}{\sin^2(x)+3}\, dx = \int_0^1 \frac{t^3}{t^2+3}\, dt = \ldots$

5 - Intégrale de la forme $\displaystyle\int f(\tan x)\ dx$ **:**

On pose $t = \tan x$, alors $x = \arctan t$, $dx = \frac{1}{1+t^2}\ dt, \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ et $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. On a donc,

$$\int f(\tan x)\ dx = \int \frac{f(t)}{1+t^2}\ dt.$$

Exemple 37. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)+1}{\tan^2(x)+1}\ dx = \int_0^1 \frac{t+1}{(t^2+1)^2}\ dt = \ldots$

6 - Intégrale de la forme $\displaystyle\int f(\sin x, \cos x)\ dx$ (f est une fonction a deux variables) :

Pour intégrer des fractions rationnelles en sinus et cosinus de la forme $\displaystyle\int f(\sin x, \cos x)\ dx$, on utilise les règles de Bioche. Posons $w(x) = f(\sin x, \cos x)\ dx$. Alors,
- Si $w(-x) = w(x)$, on pose $t = \cos x$.
- Si $w(\pi - x) = w(x)$, on pose $t = \sin x$.
- Si $w(\pi + x) = w(x)$, on pose $t = \tan x$.

Exercice résolu 38. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\ dx.$

Solution : On a $w(x) = \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\ dx$ est invariante par $w(-x) = w(x)$, on pose donc $t = \cos x$, de sorte que $dt = -\sin x\ dx$ et $\sin^3 x\ dx = (\sin^2 x)\sin x\ dx = -(1-t^2)\ dx$. Le calcul donne alors

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\ dt \\ &= -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1+t^2}{1+t^2}\ dt + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{2}{1+t^2}\ dt \\ &= -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} + \arctan(\frac{\sqrt{2}}{2}). \end{aligned}$$

Remarque 39. 1. Si deux au moins de ces changements sont vraies, on pose $t = \cos(2x)$.

2. Dans tout les cas, le changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$ ramène au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en t. mais cela a deux inconvénients :

   • d'une part, les calculs seront plus longs car on obtiendra des polynômes de degré plus élevé.

   • d'autre part, si un point de la forme $\pi + 2k\pi$ fait partie du domaine d'étude, il sera nécessaire de faire une étude particulière pour ce point.

Exemple 40. : Calculons une primitive sur $]-\pi, \pi[$ de la fonction

$$f:\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}.$$

On a

$$w(-x) = -\frac{\sin(-x)}{1+\cos(-x)}dx = w(x).$$

On utilise donc le changement de variable $t = \cos(x)$, soit $dt = -\sin(x)dx$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}dx &= -\int \frac{dt}{1+t} \\ &= -\ln|1+t| \\ &= -\ln|1+\cos(x)| = -\ln(1+\cos(x)).\end{aligned}$$

Regardons ce qu'on obtient si on fait le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
Dans ce cas, $dt = \frac{1}{2}(1+t^2)dx$ et

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}dx &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \int \frac{2t}{1+t^2}dt \\ &= \ln(1+t^2) \\ &= \ln\left(1+\tan^2(\tfrac{x}{2})\right).\end{aligned}$$

<u>Exercice résolu</u> 41. Calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sin x}$.

Solution : On pose $t = \tan(\frac{x}{2})$, alors $x = 2\arctan t$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. On a donc

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{dt}{t^2+t+1}$$

On écrit le polynôme t^2+t+1 sous la forme $(x-p)^2+q^2$.
Un simple calcul donne $t^2+t+1 = (t+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$, par le changement de variable $t = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{du}{u^2+1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan u + \text{cte} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + \text{cte}\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan(\frac{x}{2})+1}{\sqrt{3}}\right) + \text{cte}.$$

1.8 Exercices

Exercice 1. En utilisant les primitives usuelles, Calculer les intégrales ou primitives suivantes :

$$\int_0^1 x(2x^2+4)^3\,dx,\quad \int (x+\sqrt{x})^2\,dx,\quad \int_1^e \frac{dx}{x\ln(3x)},\quad \int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx,$$

$$\int \frac{\cos(\ln(t))}{t}\,dt,\quad \int_0^x \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt,\quad \int_0^2 \left|t^2-3t+2\right|\,dt,\quad \int \frac{dt}{t\sqrt{1-ln^2(t)}}.$$

Exercice 2. Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,dx.$

1. Montrer que la suite (I_n) est bien définie et calculer I_0.
2. Montrer que la suite (I_n) est convergente.
3. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), \frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 3. Pour tout entier n on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x^2}\, dx$.

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n - u_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$. En déduire u_2 et u_3.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.
4. En minorant $1-x^2$, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n \leq \frac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 4.

1. En utilisant l'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2}\, dt, \qquad B = \int_0^\pi t^2 \cos(t)\, dt.$$

2. En utilisant l'intégration par changement de variable, déterminer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{x(\ln^2(x)-4)}, \quad \int \frac{\sin(x)\, dx}{(\cos^2 x + 2\cos x + 5)^2}, \quad \int \frac{e^{3x}+6e^{2x}-e^x}{(e^x-3)^2(e^x-1)}\, dx.$$

Exercice 5. Calculer les limites des suites définies par le terme géneral suivant :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}, \qquad v_n = \left(\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k^2}{n^2})\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 6.

1. Calculer la primitive $\displaystyle\int \frac{x^4-3x^2+2}{x^4+x^2}\, dx$, puis, en déduire $\displaystyle\int \frac{\cos^3(t)+\cos^5(t)}{\sin^2(t)+\sin^4(t)}\, dt$.
2. Calculer ces deux primitives $\displaystyle\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}\, dx$ et $\displaystyle\int \frac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}\, dx$,

Exercice 7. Calculer les primitives suivantes :

$$\int_0^x \frac{1}{a+b\cos^2(t)}\, dt; a,b>0, \quad \int_0^x \frac{dt}{\sin^2(t)+3\cos^2(t)}, \quad \int_0^x \frac{t^2}{(t\sin(t)+\cos(t))^2}\, dt.$$

Chapitre 2

Intégrales Généralisées

On sait intégrer sur les segments $[a, b]$ et on souhaite étendre la notion à tout intervalle et ainsi donner un sens entre autre à

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

2.1 Définitions

Définition 5. Soit f une fonction réelle définie sur $]a, b[$. On dit que f est localement intégrable sur $]a, b[$ si f est intégrable sur tout intervalle fermé borné $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$.

Remarque 42. Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors elle est localement intégrable sur I.

Exemple 43. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est localement intégrable sur $]0, 1]$.

Définition 6. Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle $[a, b[$.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente si $\displaystyle\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\, dt$ existe et est finie.
Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est divergente.
$\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\, dt$ est appelée intégrale généralisée ou impropre de la fonction f sur $[a, b[$.

Définition 7. Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle $]a, b]$.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente si $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \int_x^a f(t)\, dt$ existe et est finie.

Définition 8. Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle $]a, b[$.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente si $\displaystyle\int_a^c f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\, dt$ sont convergentes pour tout $c \in]a, b[$.
On pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt.$

Exercice résolu 44. Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt.$

Solution : La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$. Soit $x \in [0, +\infty[$, On a

$$\int_0^x e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - e^{-x} = 1$, alors $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est convergente et on a $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$.

Exercice résolu 45. Etudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$.

Solution : La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, 1]$, donc le problème se pose uniquement en 0. Soit $x \in]0, 1]$ On a

$$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim\limits_{x\to 0^+} 2 - 2\sqrt{x} = 2$, alors $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est convergente et on a $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$.

Exercice résolu 46. Etudier la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.

Solution : La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $] - \infty, +\infty[$, donc le problème se pose en $+\infty$ et en $-\infty$. On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to+\infty} [\arctan t]_0^x = \frac{\pi}{2}.$$

et

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to-\infty} [\arctan t]_x^0 = \frac{\pi}{2}.$$

Donc, les deux intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ et $\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2}$ sont convergentes. Par suite, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ est convergente et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

Remarque 47. Dans le cas où $a = -\infty$ et $b = +\infty$, l'existence de $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{-x}^x f(t)\,dt$ ne prouve pas la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$. Par exemple, il suffit de considérer une fonction impaire continue.
On a $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dt$ diverge alors que $\int_{-x}^x t\,dt = 0$, pour tout $x > 0$.

Proposition 14. Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ avec b fini.
Si f est prolongeable par continuité en b, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente.

Remarque 48. En posant $f(b) = \lim_{x \to b} f(x) = l$ et désignant par F la primitive de f qui s'annule en a, la fonction F est continue en b et on a

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\, dt = \lim_{x \to b} F(x) - F(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Dans ce cas, on dit qu'il y'a une fausse intégrale généralisée.

Remarque 49. On a aussi $\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente dans les deux cas suivantes :

- f est continue sur $]a, b]$ (a fini) et prolongeable par continuité en a.
- f est continue sur $]a, b[$ (a et b sont finis) et prolongeable par continuité en a et b.

Exercice résolu 50. Etudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 t\ln(t)\, dt$.

Solution : La fonction $t \mapsto t\ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$. Comme $\lim_{t \to 0^+} t\ln(t) = 0$, alors f admet un prolongement par continuité en 0. Par suite, $\int_0^1 t\ln(t)\, dt$ est convergente, c'est à dire $\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 t\ln(t)\, dt$ existe et est finie. Pour tout $x > 0$, on a

$$\int_x^1 t\ln(t)\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t}{2}\, dt = -\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{4} + \frac{x^2}{4}.$$

Donc

$$\int_0^1 t\ln(t)\, dt = \lim_{x \to 0^+} \int_x^1 t\ln(t)\, dt = \lim_{x \to 0^+} -\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{4} + \frac{x^2}{4} = -\frac{1}{4}.$$

2.2 Propriétés des Intégrales Généralisées

Proposition 15. *(Linéarité)*
Si les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\, dt$ et $\int_a^b g(t)\, dt$ sont convergentes, alors l'intégrale généralisée $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\, dt$; où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$; est convergente et on a

$$\int_a^b \big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big)\, dt = \alpha \int_a^b f(t)\, dt + \beta \int_a^b g(t)\, dt$$

Proposition 16. *(Relation de Chasles)*
l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente si et seulement si les intégrales $\int_a^c f(t)\, dt$ et $\int_c^b f(t)\, dt$ sont convergentes pour tout $c \in]a, b[$, et on a

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt$$

2.3 Calcul Pratique des Intégrales Généralisées

2.3.1 Utilisation des Primitives

Définition 9. Soit f une fonction continue sur $]a,b[$.
Si F est une primitive de f, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si et seulement si $\lim_{x\to a^+} F(x)$ et $\lim_{x\to b^-} F(x)$ existent :
On définit alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Exemple 51. On a $F : x \mapsto (\ln x)^2$ est une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{2\ln x}{x}$, donc

$$\int_0^1 \frac{2\ln t}{t}\,dt = F(1) - \lim_{x\to 0^+} F(x) = 0 - (+\infty) = -\infty.$$

Exercice 52. En utilisant les primitives, déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx, \quad \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}, \quad \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}.$$

2.3.2 Intégration par Parties

Théorème 53. Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur $]a,b[$.
On suppose que $\lim_{x\to a^+} u(x)v(x) = L^+$ et $\lim_{x\to b^-} u(x)v(x) = L^-$ existent. Alors, $\int_a^b u(t)v'(t)\,dt$ est convergente si et seulement si $\int_a^b u'(t)v(t)\,dt$ est convergente et on a

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = L^- - L^+ - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

<u>Exercice résolu</u> 54. Calculer $\int_0^1 (\ln t)^2\,dt$.

Solution : On pose $u(t) = (\ln t)^2$ et $v'(t) = 1$ donc $u'(t) = \dfrac{2\ln t}{t}$ et $v(t) = t$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\ln t)^2\,dt &= -\lim_{x\to 0^+} t(\ln t)^2 - \int_0^1 t\frac{2}{t}\ln t\,dt \\
&= -2\int_0^1 \ln t\,dt = -2\int_0^1 (t)'\ln t\,dt \\
&= 2\lim_{x\to 0^+} t\ln t + 2\int_0^1 t\frac{1}{t}\,dt = 2.
\end{aligned}$$

Exercice 55. En utilisant l'intégration par parties, montrer que $\int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t}\,dt = \dfrac{1}{\lambda}$.

2.3.3 Intégration par Changement de Variables

Théorème 56. Soient $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une bijection de classe C^1 avec $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\varphi(x) = a$ et $\lim\limits_{x\to\beta^-}\varphi(x) = b$. Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente si et seulement si $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt$ est convergente et on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt.$$

Exercice résolu 57. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$

Solution : On pose $t = \sin(x)$, alors $dt = \cos(x)\,dx$. La fonction $\sin :]\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to]-1,1[$ est une bijection de classe C^1. Donc,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{|\cos(x)|}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \pi.$$

Exercice 58. En utilisant le changement de variable $u = \sqrt{1+e^x}$, déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

2.4 Intégrales Généralisées des Fonctions à Signe Constant

Il est facile de voir que la convergence de l'intégrale $-\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ se ramène à celle de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$. Par conséquent, dans la suite on ne considère que le cas des fonctions positives.

2.4.1 Critère de la Convergence Majorée

Proposition 17. Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue et positive. Alors, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si et seulement s'il existe $M \geq 0$ (M est indépendante de x) tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq M$ pour tout $x \in [a,b[$.

2.4.2 Critère de Cauchy

Proposition 18. Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. l'intégrale impropre en b, $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si (et seulement si)

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists c \in [a,b[\quad \forall x,y \in [c,b[\quad \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq \varepsilon.$$

2.4.3 Critère de Comparaison

Proposition 19. Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et positives.
S'il existe $M \neq 0$ (M est indépendante de x) tel que $f(x) \leq Mg(x)$ pour tout $x \in [a, b[$.
Alors,

- $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ converge $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ converge.
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ diverge $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ diverge.

Exercice résolu 59. Etudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

Solution : Pour tout $t \geq 1$, on a $e^{-t^2} \leq e^{-t}$. Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$ est convergente, alors d'après le critère de comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ converge.
D'autre part, comme la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, 1]$, alors $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\, dt$ est une intégrale simple convergente. On déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ est convergente car c'est la somme de deux intégrales convergentes.

2.4.4 Critère de Négligeabilité

Proposition 20. Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que :
$f(t) = \underset{b}{O}(g(t))$ (en particulier $f(t) = \underset{b}{o}(g(t))$) et g est de signe constant, alors, si l'intégrale $\int_a^b g(t)\, dt$ est convergente, alors, l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ l'est aussi.

Remarque 60. La condition "de signe constant" est indispensable. Par exemple : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$ converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\, dt$ diverge, bien qu'en $+\infty$, $\displaystyle\frac{|\sin t|}{t} = o\left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)$.

2.4.5 Critère d'Equivalence

Proposition 21. Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues et positives telles que $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, alors, $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ sont de même nature.

Remarque 61. Si f est continue et positive sur $[a, +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l > 0$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ est divergente.

Exemple 62. Puisque $\sin(t) - t$ est équivalent en 0 à $\frac{-t^3}{6} \leq 0$, alors, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^\lambda \left(\sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\right)\, dt$ converge si et seulement si $\lambda < 2$.

Remarque 63. La condition "de signe constant" est, là encore, indispensable. Par exemple, $\frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \frac{|\sin t|}{t}$ et $\frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ sont équivalentes en $+\infty$ mais ; d'après la remarque 60 ; leurs intégrales ne sont pas de même nature.

2.4.6 Integrales de Référence

1 - Intégrales de Riemann

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.
- $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$.

Exemple 64. On a

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\, dx$ diverge car $\frac{1}{4} < 1$ ($\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$).
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt[4]{x^3+1}}\, dx$ converge car $\frac{1}{x\sqrt[4]{x^3+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{7}{4}}}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{7}{4}}}\, dx$ est convergente.
3. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\, dx$ est convergente.

2 - Intégrales de Bertrand

- $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (lnx)^\beta}\, dx$ où $a > 1$, converge si $\alpha > 1$ (β quelconque) ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.
- $\displaystyle\int_0^{a} \frac{1}{x^\alpha |lnx|^\beta}\, dx$ où $0 < a < 1$, converge si $\alpha < 1$ (β quelconque) ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exemple 65. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} (lnx)^2\, dx$ est divergente, car c'est une intégrale de Bertrand avec $\alpha = 0$ et $\beta = -2 < 1$.

Exercice résolu 66. Etudier la nature de $\displaystyle\int_0^{1} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$, où $0 < \alpha < 1$.

Solution : La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ n'est pas définie en 0.
On a $\lim\limits_{t\to 0} \frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{t^{\alpha-1}} = \lim\limits_{t\to 0} e^{-t} = 1$. Donc $t^{\alpha-1}e^{-t} \sim t^{\alpha-1}$ au voisinage de 0. Comme $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}\, dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\alpha}}$ est une intégrale de Riemann convergente car $1-\alpha < 1$, alors d'après le critère de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}\, dt$ est convergente.

Exercice 67. Etudier la nature des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\, dx, \quad B = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^4}\, dx, \quad C = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x + e^{-x}}\, dx,$$

$$D = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1}\, dx, \quad E = \int_0^{+\infty} \cos(\beta x) e^{-x^2}\, dx, \quad F = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta},$$

$$G = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2)\, dx, \quad H = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}\, dt, \quad I = \int_0^1 \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\, dt.$$

2.5 Intégrales Absolument Convergentes

Définition 10. Soit $f: [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On dit que $\int_a^b f(t)\, dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente

Théorème 68. Soit $f: [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Si $\int_a^b f(t)\, dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Remarque 69. La réciproque du théorème est fausse. Dans ce cas, une intégrale généralisée convergente et non absolument convergente est dite semi-convergente.

Exemple 70. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est semi-convergente.
(Indication : $\left|\frac{\sin t}{t}\right| \geq \frac{(\sin t)^2}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t}$.)

Exercice résolu 71. Etudier la convergence absolue de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3}\, dt$.

Solution : Pour tout $t \geq 1$, on a $0 \leq \left|\frac{\sin t}{t^3}\right| \leq \frac{1}{t^3}$.
Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\, dt$ est une intégrale de Riemann convergente, alors, d'après le critère de comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t^3}\right| dt$ est convergente. Ce qui veut dire que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3}\, dt$ est absolument convergente.

Proposition 22. *(Critère de Riemann)*
(i) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ telle que $\lim_{t\to+\infty} x^\alpha f(x) = k$ existe.

- Si $\alpha > 1$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ est absolument convergente.
- Si $\alpha \leq 1$ et $k \neq 0$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ est divergente.

(ii) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $]a, b]$ telle que $\lim_{t\to a^+} (x-a)^\alpha f(x) = k$ existe.

- Si $\alpha < 1$, alors $\int_a^b f(t)\, dt$ est absolument convergente.
- Si $\alpha \geq 1$ et $k \neq 0$, alors $\int_a^b f(t)\, dt$ est divergente.

Exercice résolu 72. Etudier la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2-1}\, dt$.

Solution : La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ est continue sur $[2, +\infty[$ et $\lim_{t\to+\infty} x^2 f(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$. Donc d'après le critère de Riemann ($\alpha = 2$), l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2-1}\, dt$ est absolument convergente. Par suite elle est convergente.

Exercice résolu 73. Etudier la nature de l'intégrale $\int_{-1}^{0} \frac{1}{t^2-1}\, dt$.

Solution : La fonction $f \; : \; x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ est continue sur $]-1,0]$ et $\lim\limits_{t\to -1^+}(x+1)^1 f(x) = \lim\limits_{t\to -1^+} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{t\to -1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{2}$. Donc, d'après le critère de Riemann ($\alpha = 1$), l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2-1}\, dt$ est divergente.

Pour montrer qu'une intégrale converge, quand elle n'est pas absolument convergente, on dispose du théorème suivant.

Théorème 74. *(Règle d'Abel)*
Soit f, g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$, telles que
(i) f est de $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$,
(ii) f est décroissante et de limite 0 en $+\infty$,
(iii) il existe un réel $M \geq 0$ tel que, pour tout $x \in [a, +\infty[$, $\displaystyle\left|\int_a^x g(t)\, dt\right| \leq M$.
Alors l'intégrale
$$\int_a^{+\infty} f(t)\, g(t) dt \quad \text{converge.}$$

<u>Exercice résolu</u> 75. Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt$, suivant les valeurs de $\alpha > 0$.

Solution : (i) Pour $\alpha > 1$, cette intégrale est absolument convergente.
(ii) Si $0 < \alpha \leq 1$. La fonction $f : \; t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est de $\mathcal{C}^1$ et décroissante sur $[1, +\infty[$. De plus $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

La fonction $g : \; t \mapsto \sin t$ est continue sur $[1, +\infty[$ et $\displaystyle\left|\int_1^x \sin t \; dt\right| \leq 2$ pour tout x.

La règle d'Abel nous donne la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt$.

2.6 Exercices

Exercice 1. En utilisant les primitives usuelles, déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\, dx, \qquad B = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{x}\, dx.$$

Exercice 2. Etudier la nature des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)}\, dx, \quad B = \int_1^{+\infty} x^{2019} e^{-x}\, dx, \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+2-cos(x)}\, dx,$$

$$D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x}\, dx, \quad E = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}}\, dx, \quad F = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin(x))\, dx.$$

Exercice 3. Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\, dt.$

1. Montrer que I est convergente.
2. Pour $\varepsilon > 0$, établir la relation :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

3. En déduire le calcule de I (utiliser la première formule de la moyenne).
4. En déduire le calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\, dx$ (Poser $x = e^{-t}$).

Exercice 4. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^3+1)^n}$, où n est un entier naturel.

1. Etudier pour quelles valeurs de n l'intégrale I_n converge.
2. Calculer I_1.
3. Montrer que si $n \geq 2$, on a : $I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n$.
4. En déduire l'expression de I_n.

Exercice 5. Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t^2+1)}$.

1. Montrer que I est convergente.
2. Calculer $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.
3. En déduire I (poser $x = \sqrt{t}$).

Exercice 6. Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (1+t)^\beta}\, dt; \quad \alpha, \beta > 0, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t}\, dt, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt.$$

Exercice 7. Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (1+t)^\beta}\, dt; \quad \alpha, \beta > 0, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, dt, \qquad \int_0^{+\infty} t^3 e^{-3t^2}\, dt,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)\, dt, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t}\, dt, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\cos(t) + \sqrt{t}}\, dt.$$

Chapitre 3

Equations Différentielles Linéaires

3.1 Equations Différentielles du Premier Ordre

3.1.1 Définition

Définition 11. Soit ϕ une fonction de trois variables à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On appelle équation différentielle du premier ordre, une relation de la forme $\phi(x, y, y') = 0$ faisant intervenir une variable x, une fonction $y = y(x)$ et sa dérivée $y'(x)$.
Une fonction f dérivable est dite solution de cette équation sur $I \subset \mathbb{R}$ si $\phi(x, f(x), f'(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.

Exemple 76. L'équation $x^3y' - 2 = 0$ est équation différentielle du premier ordre, elle admet $f(x) = \frac{-1}{x^2}$ comme solution sur $I = \mathbb{R}^*$.

3.1.2 Equation à Variables Séparées

Définition 12. Une équation différentielle du premier ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme :

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

Méthode de Résolution : On a

$$\begin{aligned} y' = \frac{f(x)}{g(y)} &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \\ &\Rightarrow \quad g(y)dy = f(x)dx \\ &\Rightarrow \quad \int g(y)dy = \int f(x)dx \end{aligned}$$

Le problème se ramène à deux intégrations.

<u>Exercice résolu</u> 77. Résoudre l'équation différentielle $(1 + x^2)y' + 3xy = 0$

Solution : On a

$$\begin{aligned}(1+x^2)y'+3xy=0 \Rightarrow \quad & y'=\frac{-3x}{1+x^2}y\\ \Rightarrow \quad & \frac{dy}{y}=-\frac{3x}{1+x^2}\\ \Rightarrow \quad & \int\frac{dy}{y}=\int\frac{-3x}{1+x^2}\\ \Rightarrow \quad & \ln(|y|)=-\frac{3}{2}\ln(1+x^2)+\text{cte}\\ \Rightarrow \quad & y=\pm e^{\text{cte}}\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)}},\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation différentielle $(1+x^2)y'+3xy=0$ est

$$y(x)=\frac{K}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)}}, \qquad \text{avec} \quad K\in\mathbb{R}.$$

Définition 13. *(Cas Particulier : Equation Autonome)*
L'équation autonome est un cas particulier d'équations à variables séparées, elle est de la forme $y'=g(y)$.

Exercice 78. Résoudre l'équation autonome $y'=y^2+y$.

3.1.3 Equation Linéaire

Définition 14. L'équation différentielles linéaire du premier ordre est de la forme :

$$a(x)y'+b(x)y=f(x); \qquad (E).$$

Où $a(x)$, $b(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions continues sur un même intervalle $I\subset\mathbb{R}$, avec $\forall x\in I: a(x)\neq 0$.
On appelle *équation homogène* ou encore *équation sans second membre* associée à (E), l'équation :

$$a(x)y'+b(x)y=0 \qquad (E.H).$$

Exemple 79. (i) L'équation $xy'+(\cos x)y=2x^2$ est linéaire.
(ii) L'équation $yy'+xy=2x^2-1$ n'est pas linéaire.

Proposition 23. L'ensemble des solutions de (E) est obtenu en ajoutant à toutes les solutions de (E.H) une solution particulière de (E).

1 - Résolution de l'équation homogène associée :
On a

$$\begin{aligned}a(x)y'+b(x)y=0 \Rightarrow \quad & y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{b(x)}{a(x)}\\ \Rightarrow \quad & \frac{dy}{y}=-\frac{b(x)}{a(x)}dx\\ \Rightarrow \quad & \int\frac{dy}{y}=-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx\\ \Rightarrow \quad & \ln|y|=-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx+\text{cte}\end{aligned}$$

On pose $A(x) = \displaystyle\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx$. Alors, $\ln|y| = -A(x)\text{cte}$. Donc, $y = e^{\text{cte}}e^{-A(x)}$ et par suite $y = \pm e^{\text{cte}}e^{-A(x)}$. Par conséquent, $y_h = Ce^{-A(x)};\quad C \in \mathbb{R}$ est la solution générale de l'équation homogène $(E.H)$.

Remarque 80. L'équation linéaire sans second membre est à variables séparées.

2 - Recherche d'une Solution Particulière de (E) :
Pour déterminer une solution particulière de (E) on va utiliser la méthode de variation de la constante.
Soit y_h la solution générale de l'équation homogène $(E.H)$. Donc, $y_h = Ce^{-A(x)}$ où $C \in \mathbb{R}$ et $A(x) = \displaystyle\int \frac{b(x)}{a(x)}dx$.
La méthode de variation de la constante consiste à remplacer la constante C par une fonction $C(x)$ et chercher une solution particulière de l'équation avec second membre (E) de la forme $y = C(x)e^{-A(x)}$. On calcule y', puis on remplace y et y' par leurs expressions dans l'équation (E) et on utilise le fait que $e^{-A(x)}$ est solution de $(E.H)$, on trouve

$$C'(x) = \frac{f(x)}{a(x)}e^{A(x)},$$

ce qui implique

$$C(x) = \int \frac{f(x)}{a(x)}e^{A(x)}\, dx + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Donc, la solution générale de l'équation avec second membre (E) est

$$y(x) = C(x)e^{-A(x)} = e^{-A(x)}\int \frac{f(x)}{a(x)}e^{A(x)}\, dx + ke^{-A(x)}, \quad k \in \mathbb{R},$$

c'est à dire $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ avec $y_h(x) = ke^{-A(x)};\quad k \in \mathbb{R}$ est la solution générale de l'équation homogène $(E.H)$ et $y_p(x) = e^{-A(x)}\displaystyle\int \frac{f(x)}{a(x)}e^{A(x)}\, dx$ est une solution particilière de (E).

<u>Exercice résolu</u> 81. Résoudre l'équation linéaire $xy' - y = \frac{x}{x^2-1}, \quad (E)$.

Solution : On commence par résoudre l'équation homogène $xy' - y = 0, \quad (E.H)$. On a

$$\begin{aligned} xy' - y = 0 \Rightarrow &\quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow &\quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow &\quad \ln|y| = \ln|y| + \text{cte} \\ \Rightarrow &\quad y = C.x, \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On cherche maintenant une solution particulière de (E) ; sous la forme $y_p = C(x).x$; par la méthode de variation de la constante :

$$\begin{aligned} y_p \quad \text{est solution de} \quad (E.H) &\Rightarrow \quad xy_p' - y_p = \frac{x}{x^2-1} \\ &\Rightarrow \quad x^2C'(x) + xC(x) - xC(x) = \frac{x}{x^2-1} \\ &\Rightarrow \quad C'(x) = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} \\ &\Rightarrow \quad C'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} \\ &\Rightarrow \quad C(x) = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| \\ &\Rightarrow \quad y_p = C(x).x = x(-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2-1|). \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation (E) est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Cx + x(-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2-1|), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Remarque 82. Si $y_1$et y_2 sont deux solutions particulières de (E), alors $y_1 - y_2$ est solution de $(E.H)$, et la solution générale de (E) est

$$y = y_1 + c(y_1 - y_2), c \in \mathbb{R} \text{ arbitraire.}$$

3.1.4 Équations Différentielles Particulières

Dans cette section, on va présenter quelques équations différentielles du premier ordre non linéaires se ramenant à des équations différentielles linéaires.

1 - Équation de Bernoulli

Définition 15. Une équation différentielle est dite de Bernoulli si elle est de la forme :

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, n \in \mathbb{R} \qquad (Ber)$$

Remarque 83. Si $n = 1$, l'équation différentielle de Bernoulli est une équation différentielle linéaire.

Pour résoudre cette équation, on suppose qu'elle admet une solution y qui ne s'annule pas. On divise l'équation (Ber) par y^n, on obtient

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{1}{y^{n-1}} - q(x) = 0.$$

On pose $u = y^{1-n}$, et donc $u' = (1-n)\frac{y'}{y^n}$. Cette substitution transforme l'équation (Ber) en une équation différentielle linéaire en la nouvelle variable u.

Exercice résolu 84. Résoudre l'équation de Bernoulli suivante : $y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{\sqrt{y}}, \quad (Ber)$.

Solution : C'est une équation de Bernoulli avec $n = -\frac{1}{2}$, divisons tous les termes par $y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{y}}$, on obtient l'équation suivante

$$\sqrt{y}y' + \frac{2}{x}\sqrt{y}y = e^x, \quad (Ber').$$

Introduisant la nouvelle fonction $u = y^{\frac{3}{2}} = \sqrt{y}y$, d'où $u' = \frac{3}{2}\sqrt{y}y'$, portons ces expressions dans l'équation (Ber'), nous obtenons l'équation différentielle linéaire

$$\frac{2}{3}u' + \frac{2}{x}u = e^x, \quad (E)$$

qu'on peut résoudre facilement par la méthode de variation de la constante.

Exercice 85. Résoudre les équations de Bernoulli suivantes :

$$xy' + y = y^2 \ln x, \quad y - \frac{x}{2}y' = \sqrt{y}, \quad y' - y = xy^6.$$

2 - Équation de Riccati

Définition 16. *Les équations de Riccati sont des équations différentielles de la forme :*

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \qquad (Ric)$$

Pour résoudre cette équation, on a besoin de connaitre une solution particulière y_p. On pose le changement de fonction suivant :

$$y = y_p + \frac{1}{z}.$$

Cette substitution transforme l'équation (Ric) en une équation linéaire en z.

<u>Exercice résolu</u> 86. Résoudre l'équation de Riccati suivante :

$$y' - y + y^2 = 4x^2 + 2x + 2, \quad (Ric).$$

Sachant que $y_p = 2x + 1$ est une solution particulière.

Solution : Soit le changement de variables :

$$y = y_p + \frac{1}{z} = 2x + 1 + \frac{1}{z}.$$

Substituons cette expression dans l'équation (Ric), afin d'obtenir une équation linéaire non homogène de la forme

$$z' + (-4x - 1)z = -1,$$

qui se résout par la méthode de variation de la constante.

Exercice 87. Résoudre les équations de Riccati suivantes :

$$(x^2 + 1)y' = y^2 - 1 \quad (y_p = 1), \quad x^3y' + y^2 + x^2y + 2x^4 = 0 \quad (y_p = -x^2).$$

3 - Équation de Lagrange

Définition 17. *Les équations de Lagrange sont des équations différentielles de la forme :*

$$y = xf(y') + g(y') \qquad (Lag)$$

Pour résoudre ce type d'équations, on commence par dériver (Lag) par rapport à x, nous obtenons :

$$y' = f(y') + xf'(y')y'' + g'(y')y'' \qquad (Lag).$$

Le changement de fonction $t(x) = y'(x)$ conduit à l'équation :

$$t = f(t) + xf'(t)t' + g'(t)t' \qquad (Lag').$$

c-à-d

$$f(t) - t + (xf'(t) + g'(t))t' = 0 \qquad (Lag')$$

Sachant que $t'_x = \frac{1}{x'_t}$ (relation entre dérivées de fonctions réciproques) l'équation précédente se transforme en une équation différentielle linéaire en $x(t)$:

$$(f(t) - t)x' + f'(t)x = -g'(t) \qquad (E)$$

La résolution de cette équation linéaire admet pour solution : $x(t) = x_H + x_p = F(t)$, par conséquent, $y(t) = xf(t) + g(t) = G(t)$.
Nous obtenons des équations paramétriques $F(t)$ et $G(t)$ pour des courbes intégrales.

Exercice 88. Résoudre les équations de Lagrange suivantes :

$$y' = x(y')^2 - \frac{1}{y'}, \quad y = -xy' - \ln(y').$$

3.2 Equations Différentielles Linéaire du Second Ordre à Coefficients Constants

3.2.1 Définition

Définition 18. Une équation différentielle du second ordre à coefficients constants est une équation différentielle de la forme

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad \text{(E)}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, et f une fonction continue sur I ouvert de $\mathbb{R}$. L'équation homogène (ou sans second membre) associée est

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \text{(E.H)}$$

3.2.2 Résolution de l'Équation Homogène

Définition 19. Deux fonctions y_1 et y_2 sont dites linéairement indépendantes si

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Théorème 89. L'équation homogène $(E.H)$ possède deux solutions linéairement indépendantes y_1 et y_2. De plus, toute solution y de $(E.H)$ est de la forme

$$y = Ay_1 + By_2, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Méthode de Résolution : Pour résoudre l'équation homogène $(E.H)$, on cherche une solution de la forme $y(x) = e^{rx}$.
En remplaçant dans l'équation, on trouve *l'équation caractéristique*

$$ar^2 + br + c = 0, \qquad (E.C)$$

La résolution de l'équation $(E.H)$ dépend du signe de $\Delta = b^2 - 4ac$. On a donc, les trois cas suivants.
Cas 1 : $\Delta > 0$:
L'équation caratéristique admet deux racines réelles distinctes $r_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Alors, La solution générale de l'équation homogène $(E.H)$ est

$$y_h = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Cas 2 : $\Delta = 0$:
L'équation caratéristique admet une racine réelle double $r = \dfrac{-b}{2a}$. Donc, la solution générale de l'équation homogène $(E.H)$ est :

$$y_h = (Ax + B)e^{rx}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Cas 3 : $\Delta < 0$:
L'équation caratéristique admet deux racines complexes conjugées $r_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. On pose $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$. Alors, la solution générale de l'équation homogène $(E.H)$ est :

$$y_h(x) = e^{\alpha x}\Big(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\Big); \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

On peut l'écrire aussi sous la forme

$$y_h(x) = Ke^{\alpha x}\cos(\beta x + C); \qquad K, C \in \mathbb{R}.$$

<u>Exercice résolu</u> 90. Résoudre l'équation $y'' + 3y' - 4y = 0$.
Solution : L'équation caractéristique est : $r^2 + 3r - 4 = 0$ dont le $\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25 > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles $r_1 = \frac{-3+5}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{-3-5}{2} = -4$. Donc, la solution générale est

$$y_h = Ae^{x} + Be^{-4x}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

<u>Exercice résolu</u> 91. Résoudre l'équation $y'' - 4y' + 4y = 0$.
Solution : L'équation caractéristique est : $r^2 - 4r + 4 = 0$ dont le $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$, alors l'équation caractéristique admet une racine double $r = \frac{4}{2} = 2$. Donc, la solution générale est

$$y_h = (Ax + B)e^{2x}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

<u>Exercice résolu</u> 92. Résoudre l'équation $y'' + 4y' + 5y = 0$.
Solution : L'équation caractéristique est : $r^2 + 4r + 5 = 0$ dont le $\Delta = (4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 = (2i)^2 < 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \frac{-4+2i}{2} = -2 + i$ et $r_2 = \overline{r}_1 = -2 - i$. Dans ce cas, la solution générale est

$$y_h = e^{-2x}\Big(A\cos(x) + B\sin(x)\Big); \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

3.2.3 Résolution de l'Équation avec Second Membre

Proposition 24. L'ensemble des solutions de (E) est obtenu en ajoutant à toutes les solutions de (E.H) une solution particulière de (E).

Pour résoudre l'équation avec le second membre, on va présenter une méthode pour les cas classiques et une autre pour le cas général.

Cas classique : $f(x) = e^{mx}\Big(P_n(x)\cos(\omega x) + Q_{n'}(x)\sin(\omega x)\Big)$ **avec** $m, \omega \in \mathbb{R}^*$:

Si le second membre de l'équation (E) est de la forme :

$f(x) = e^{mx}\Big(P_{n'}(x)\cos(\omega x) + Q_{n''}(x)\sin(\omega x)\Big)$ où $P_{n'}$ et $Q_{n''}$ sont deux polynômes et $m, \omega \in \mathbb{R}^*$, alors on cherche une solution particulière y_p telle que

$$y_p(x) = \begin{cases} e^{mx}\Big(R_n(x)\cos(\omega x) + T_n(x)\sin(\omega x)\Big) & \text{si } m + i\omega \text{ n'est pas racine de } (E.C), \\ xe^{mx}\Big(R_n(x)\cos(\omega x) + T_n(x)\sin(\omega x)\Big) & \text{si } m + i\omega \text{ est racine simple de } (E.C), \\ x^2e^{mx}\Big(R_n(x)\cos(\omega x) + T_n(x)\sin(\omega x)\Big) & \text{si } m + i\omega \text{ est racine double de } (E.C). \end{cases}$$

Avec R_n et T_n sont deux polynômes de degré $n = \max(n'; n'')$.

Remarque 93. Ceci inclut le cas où les polynômes $R_{n'}$ et $Q_{n''}$ sont simplement des constantes $(n = n' = 0)$, dont l'une peut être nulle, et / ou f ne contient pas d'exponentielle $(m = 0)$ et / ou pas de fonction trigonométrique $(\omega = 0)$.

Exercice résolu 94. Résoudre l'équation $y'' - 5y' + 6y = x^2 + 1, \qquad (E_1)$.

Solution : On commence par résoudre l'équation homogène associée $y'' - 5y' + 6y = 0$. l'équation caractéristique est : $r^2 - 5r + 6 = 0$ dont le $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$, alors elle admet deux racines réelles $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$ Donc, la solution générale de l'équation homogène est

$$y_h = Ae^{2x} + Be^{3x}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Le second membre est de la forme $e^{mx}\Big(P_2(x)\cos(\omega x) + Q_{-\infty}(x) = \sin(\omega x)\Big)$ avec $m = 0$, $\omega = 0$, $P_2(x) = x^2 + 1$ et $Q_{-\infty}(x) = 0$. Or $m + i\omega = 0$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme :

$y_p = e^{mx}\Big(R_2(x)\cos(\omega x) + T_2(x)\sin(\omega x)\Big) = ax^2 + bx + c$.

Puisque

$$y_p'' - 5y_p' + 6y = 6ax^2 + 2(3b - 5a)x + 6c - 5b + 2a = x^2 + 1.$$

Par identification, on obtient $a = \frac{1}{6}, b = \frac{5}{18}$ et $c = \frac{37}{108}$, par conséquent,

$$y_p(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{37}{108}.$$

Donc, les solutions de (E_1) sont

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{2x} + Be^{3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{37}{108}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice résolu 95. Résoudre l'équation $y'' - 2y' - 3y = -3xe^{-x}, \qquad (E_2)$.

Solution : L'équation caractéristique est : $r^2 - 2r - 3 = 0$ et $\Delta = 16 > 0$, alors $r_1 = -1$ et $r_2 = 3$. Donc, la solution générale de l'équation homogène est donnée par :

$$y_h = Ae^{-x} + Be^{3x}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Le second membre est de la forme $e^{mx}\Big(P_1(x)\cos(\omega x) + Q_{-\infty}(x)\sin(\omega x)\Big)$ avec $m = -1$, $\omega = 0$, $P_1(x) = -3x$ et $Q_{-\infty}(x) = 0$. Or $m + i\omega = -1$ est racine simple de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p = xe^{mx}\Big(R_1(x)\cos(\omega x) + T_1(x)\sin(\omega x)\Big) = x(ax + b)e^{-x}.$$

On calcule $y_p' = e^{-x}(-ax^2 + (2a - b)x + b)$ puis $y_p'' = e^{-x}(ax^2 + (-4a + b)x + 2b - 2a)$ et on remplace dans l'équation (E_2), on obtient $a = \frac{3}{8}$ et $b = \frac{3}{16}$, par conséquent

$$y_p(x) = x(\frac{3}{8}x + \frac{3}{16})e^{-x}.$$

Donc, la solution générale de (E_2) est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-x} + Be^{3x} + x(\frac{3}{8}x + \frac{3}{16})e^{-x}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

<u>Exercice résolu</u> 96. Résoudre l'équation $y'' + 9y = e^{-x}\cos x, \qquad (E_3)$.

Solution : L'équation caractéristique est : $r^2 + 9 = 0$, elle admet deux racines complexes $r_1 = 3i$ et $r_2 = -3i$. Donc, la solution générale de l'équation homogène est donnée par :

$$y_h = A\cos(3x) + B\sin(3x); \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Le second membre est de la forme $e^{mx}\Big(P_0(x)\cos(\omega x) + Q_0(x)\sin(\omega x)\Big)$ avec $m = -1$, $\omega = 1$, $P_0(x) = 1$ et $Q_{-\infty}(x) = 0$. Or $m + i\omega = 1 + i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p = e^{mx}\Big(R_0(x)\cos(\omega x) + T_0(x)\sin(\omega x)\Big) = e^{-x}\Big(a\cos(x) + b\sin(x)\Big).$$

On calcule y_p' et y_p'' et on remplace dans l'équation (E_3), on obtient

$$(2b + 9a - 1)\cos x + (9b - 2a)\sin x = 0.$$

Ceci implique en utilisant le fait que les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes, que $a = \frac{9}{85}$ et $b = \frac{2}{85}$.
Donc, la solution particuliére de (E_3) est

$$y_p(x) = e^{-x}\left(\frac{9}{85}\cos(x) + \frac{2}{85}\sin(x)\right); \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (E_3) est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x) + e^{-x}\left(\frac{9}{85}\cos(x) + \frac{2}{85}\sin(x)\right); \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

2- Principe de Superposition :
Si le second membre de l'équation (E) est de la forme $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$, on cherche une solution particulière y_{p_i} des équations

$$(E_i): \quad ay'' + by' + cy = f_i(x), \quad i = 1, ..., n.$$

Une solution particulière y_p de (E) est alors donnée par

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + ... + y_{p_n}(x).$$

Exercice résolu 97. Résoudre l'équation $y'' + y = x + \cos 3x, \qquad (E).$

Solution : L'équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$, elle admet deux racines complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$. Donc, la solution générale de l'équation homogène est donnée par :

$$y_h = A\cos(x) + B\sin(x); \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

On remarque que $y_1(x) = x$ est solution particulière de l'équation $y'' + y = x, \qquad (E_1)$.
Une solution particulière de (E_2) : $\quad y'' + y = \cos 3x$, est de la forme $y_{p_2} = a\cos 3x + b\sin 3x$. En remplaçant dans (E_2) , on trouve que

$$-8a\cos 3x - 8b\sin 3x = \cos 3x,$$

donc $a = -\frac{1}{8}$ et $b = 0$. Par conséquent, une solution particulière de l'équation (E) est donnée par

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = x - \frac{1}{8}\cos 3x.$$

Et la solution générale de (E) est

$$y = y_h + y_p = A\cos(x) + B\sin(x) + x - \frac{1}{8}\cos 3x; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Remarque 98. Lorsque le second membre n'est pas l'une des formes indiquées précédemment, on cherche une solution particulièere de (E) en utilisant la méthode de variation de la constante.

3- Cas général : Méthode de Variation de la Constante :
Soit y_h la solution de l'équation sans second membre $(E.H)$. Donc, $y_h(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$, où y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de $(E.H)$.
La méthode de variation de la constante consiste à remplaçer les deux constantes A et B par des fonctions $A(x)$ et $B(x)$ et chercher une solution particulière de (E) de la forme

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x).$$

On impose de plus la condition suivante

$$A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0.$$

Ce qui donne

$$y_p'(x) = A(x)y_1'(x) + B(x)y_2'(x).$$

On calcule ensuite y'', on remplace dans l'équation (E) et on utilise le fait que y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation $(E.H)$, on trouve que

$$A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = \frac{f(x)}{a}.$$

Il faut donc résoudre le système suivant dont les inconnus sont $A'(x)$ et $B'(x)$

$$\begin{cases} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0, \\ A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = \frac{f(x)}{a} \end{cases}$$

Comme y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes, alors le déterminant

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_1'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \neq 0.$$

Les deux solutions du système sont

$$A'(x) = \frac{-f(x)y_2(x)}{aW} \quad \text{et} \quad B'(x) = \frac{-f(x)y_1(x)}{aW}.$$

On obtient donc les fonctions A et B en intégrant A' et B'.
Par suite, la solution particulière de (E) est

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x).$$

Exercice résolu 99. Résoudre l'équation $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$, $\qquad (E)$.

Solution : L'équation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$, est de racine double $r = 1$. Donc, la solution générale de l'équation homogène associée à (E) est donnée par :

$$y_h(x) = (Ax + B)e^x; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme

$$y_p(x) = xA(x)e^x + B(x)e^x, \quad \text{avec} \quad A, B \quad \text{sont deux fonctions dérivables.}$$

On a

$$y_p'(x) = A'(x)xe^x + B'(x)e^x + A(x)(x+1)e^x + B(x)e^x.$$

On impose la condition

$$A'(x)xe^x + B'(x)e^x = 0.$$

On trouve que

$$y_p''(x) = A'(x)(x+1)e^x + B'(x)e^x + A(x)(x+2)e^x + B(x)e^x.$$

En remplaçant dans l'équation (E), on obtient

$$A'(x)(x+1)e^x + B'(x)e^x = \frac{e^x}{1+x^2}.$$

Résolvons donc le système

$$\begin{cases} A'(x)xe^x + B'(x)e^x = 0, \\ A'(x)(x+1)e^x + B'(x)e^x = \frac{e^x}{1+x^2}. \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} A'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \\ B'(x) = -\frac{x}{1+x^2}. \end{cases}$$

C'est à dire $A(x) = \arctan x$ et $B(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
Donc, une solution particulière de l'équation (E) est donnée par

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\Big(2x\arctan x - \ln(1+x^2)\Big)e^x.$$

Par conséquent, la solution générale de (E) est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (Ax+B)e^x + \frac{1}{2}\Big(2x\arctan x - \ln(1+x^2)\Big)e^x; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

3.3 Exercices

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
(E_1) : $(1+x^2)y' + 2xy + x^2 = 0$,
(E_2) : $\sin^2(x)y' - \tan(x)y = \tan(x)$,
(E_3) : $y'' - 3y' + 2y = x^3$,
(E_4) : $y'' + y' + y = \cos(2x)$,
(E_5) : $y'' - 2y' + y = x + xe^{-x}$.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes :
(Sep) : $(\cos t)y' = (\sin t)y^4$,
(Ber) : $y' = y + ty^3$,
(Ric) : $y' = (t-1)y + y^2 - t$, sachant qu'elle admet une solution particulière constante.

Exercice 3. En posant $u(x) = (1+x^2)y(x)$, résoudre l'équation différentielle suivantes :

$$(E): \quad (1+x^2)y'' + 4xy' + (1-x^2)y = 0.$$

Exercice 4. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E): \quad y'' - 4y' + 4y = f(x).$$

Où f est une fonction qui sera précisée plus loin.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière dans ces deus cas : $f(x) = e^{2x}$ et $f(x) = e^{-2x}$.
3. Donner les solutions de (E) si $f(x) = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{4}$. Puis, déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $h(0) = 1 = h'(0)$.

Chapitre 4

Séries Numériques

On a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$

On va écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

4.1 Généralités sur les Séries Numériques

4.1.1 Définitions

Définition 20. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$, une suite numérique. On appelle série de terme général u_n, et on note $\sum_{n\geq n_0} u_n$ ou plus simplement $\sum u_n$, la suite $(S_n)_n$ de terme général défini pour tout $n \geq n_0$ par

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

S_n est appelé somme partielle de rang n de cette série.

Remarque 100. Une série est un cas particulier de suite, c'est une suite de sommes partielles.

Exemple 101. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$. La série de terme général u_n est notée $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ est appelée ***la série harmonique***.

Les premiers sommes partielles sont : $S_1 = 1, S_2 = 1 + \frac{1}{2}, S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \ldots$.

4.1.2 Nature d'une Série Numérique

Définition 21. Soit (u_n) une suite réelle. On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite des sommes partielles (S_n) converge. Dans ce cas la limite de la suite (S_n) est alors appelée somme de la série, et est notée

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

On appelle reste d'ordre n la différence $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$.

Dans le cas de convergence on a : $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Si la série n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Remarque 102. La convergence ou la divergence d'une série ne dépend pas des premiers termes. C'est pourquoi on parle de la série de terme général u_n, notée $\sum u_n$, sans préciser son premier terme. Par contre, la somme de la série dépend évidemment du premier terme.

Théorème 103. *(Condition Nécessaire de Convergence)*
Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Preuve : Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = S.$$

On remarque que $u_n = S_n - S_{n-1}$, par passage à la limite on obtient $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque 104. la réciproque est fausse. En effet, on considère la série harmonique. On note S_n la somme partielle, on a

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \cdots + \frac{1}{n+1} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Donc si la série harmonique converge, alors la suite $S_{2n} - S_n$ converge vers 0 ce qui est impossible avec l'inégalité ci-dessus donc la série harmonique diverge bien que son terme général tend vers 0.

Corollaire 3. *(Critère de Divergence Grossière)*
Si la suite u_n ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Exemple 105. La série $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n+2}$ est divergente car $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2} = 1 \neq 0$.

Proposition 25. *(Combinaisons Linéaires de Séries Convergentes)*
Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont toutes les deux convergentes, alors pour tout réel α, la série $\sum(\alpha u_n + v_n)$ est également convergente, et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha u_n + v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Remarque 106. i) la réciproque est fausse. En effet, pour tout $n \geq 1$ on pose $u_n = \frac{1}{n}, v_n = -\frac{1}{n}$ et $\alpha = 1$. Donc, la série $\sum(u_n + v_n)$ converge vers 0, alors que ni $\sum u_n$ ni $\sum v_n$ ne convergent.
ii) Il y'a une équivalence de convergence en cas de produit par un scalaire non nul : la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \alpha u_n$ converge. Dans ce cas on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha u_n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Proposition 26. *(Cas de Trois Séries Liées par une Somme)*
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques et $\forall n \in \mathbb{N} : w_n = u_n + v_n$.
Alors si deux des trois séries $\sum u_n, \sum v_n, \sum w_n$ convergent, la troisième converge aussi. Si l'une diverge, au moins l'une des deux autres diverge.

Corollaire 4. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

4.1.3 Exemples

Définition 22. *(Série Téléscopique)*
Une série $\sum u_n$ est dite téléscopique si son terme général peut se mettre sous la forme

$$(\forall n \geq n_0), u_n = a_{n+1} - a_n,$$

Où (a_n) est une suite réelle.

Théorème 107. Une série téléscopique $\sum u_n$ avec $(\forall n \geq n_0), u_n = a_{n+1} - a_n$, converge si et seulement si la suite (a_n) est convergente.
Dans ce cas, on a : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} (a_n) - a_{n_0}$.

Exercice résolu 108. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et calculer sa somme.

Solution On remarque que $(\forall n \geq 1) : \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = a_n - a_{n+1}$, avec $a_n = \frac{1}{n}$.
Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est une série téléscopique convergente car la suite (a_n) converge vers 0, et on a :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = a_1 - \lim_{n \to +\infty} (a_n) = 1 - 0 = 1.$$

Théorème 109. *(Série géométrique)*
Soit $q \in \mathbb{R}$. La série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Preuve : La somme partielle de rang n de cette série est :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ n+1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

Si $|q| < 1$, la suite (q^n) converge vers 0, par conséquent, la série $\sum q^n$ converge si $|q| < 1$, et a pour somme $\dfrac{1}{1-q}$.

Exemple 110. La série $\sum_{n\geq 0} (\frac{7}{4})^n$ est géométrique divergente car $|\frac{7}{4}| > 1$. Par contre, $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{4^n}$ est une série géométrique convergente car $|\frac{-1}{4}| < 1$.

Exercice 111. Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \ln(1+\frac{1}{n}), \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{e^{2n}}{n^2+1}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{2^{n-2}}{5^n}, \qquad \sum_{n\geq 1} \ln(1-\frac{1}{n^2}).$$

4.1.4 Critère de Cauchy

Le résultat qui suit est fondamental. Il permet d'établir la convergence (ou la divergence) d'une série sans en connaître a priori la somme.

Théorème 112. *(Critère de Cauchy)*
Une série numérique $\sum u_n$ est convergente si et seulement si elle satisfait le critère de Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \geq N\ , \forall q \geq p \text{ on a } \left| \sum_{n=p}^{q} u_n \right| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ satisfait le critère de Cauchy si et seulement si la suite des somme partielles associée $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$, satisfait le critère de Cauchy. En effet, il suffit de remarquer que

$$\forall q \geq p \geq n_0, \quad \sum_{n=p}^{q} u_n = S_q - S_p$$

Exemple 113. On considère la série harmonique. On a

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Le critère de Cauchy n'étant pas vérifié, on en conclut que la série harmonique est divergente.

4.1.5 Séries Absolument Convergentes

Définition 23. *On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.*

Le résultat suivant est très important en pratique.

Proposition 27. *Toute série absolument convergente est convergente.*

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$, puisque la série $\sum |u_n|$ converge, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p \geq N \;, \forall q \geq p \text{ on a } \sum_{n=p}^{q} |u_n| \leq \varepsilon.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a alors

$$\left| \sum_{n=p}^{q} u_n \right| \leq \sum_{n=p}^{q} |u_n| \leq \varepsilon,$$

d'où l'on déduit que la série $\sum u_n$ satisfait au critère de Cauchy, donc elle converge.

Exemple 114. La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$ est absolument convergente puisque la série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ est convergente.

Remarque 115. La réciproque du théorème précédent est fausse. Considérons par exemple la série de terme général u_n avec

$$u_{2n} = -\frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad u_{2n+1} = \frac{1}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} u_k = 0 \qquad \text{et} \qquad S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} u_k = \frac{1}{n+1}.$$

Les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) ayant la même limite (égale à 0), alors, la suite (S_n) converge et sa limite est 0. La série de terme général u_n est donc convergente et de somme égale à 0. Cependant, cette série n'est pas absolument convergente car $\sum_{k=1}^{2n} |u_k| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$ est une suite harmonique divergente.

Définition 24. Une série numérique qui converge mais qui ne converge pas absolument est dite semi-convergente.

4.2 Séries à Termes Positifs

Dans cette section, nous nous intéressons aux séries à termes réels positifs. Tous les résultats que nous obtiendrons pour de telles séries resteront vrais pour les séries à termes négatifs, il suffit d'adapter les énoncés et les démonstrations en remplaçant croissante par décroissante, majorée par minorée, $+\infty$ par $-\infty$...·

Définition 25. Une série $\sum u_n$ est dite à termes positifs si $u_n \geq 0$ pour tout entier n.

Remarque 116. i) Une série $\sum u_n$ vérifiant $u_n \geq 0$ pour $n \geq n_0$ est aussi apellée série à termes positifs.
ii) La suite des sommes partielles (S_n) d'une série à termes positifs est croissante. En effet, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$.

Théorème 117. *(Critère de Convergence Majorée)*
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors, la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la suite (S_n) de ses sommes partielles est majorée.

Remarque 118. Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs divergente, on écrira $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$. Cette notation signifie que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
Nous allons maintenant établir les principaux critères de convergence relatifs aux séries à termes réels positifs.

Théorème 119. *(Critère de Comparaison)*
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries vérifiant $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_0.
(i) Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
(ii) Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

Preuve :
i) On a $u_n \leq v_n$ d'ou $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{n} v_k = T_n$. Puisque $(T_n)_{n\geq n_0}$, est une suite convergente donc majorée alors $(S_n)_{n\geq n_0}$ est convergente comme étant une suite croissante et majorée et par conséquent $\sum u_n$ converge.
ii) C'est la contraposée de l'assertion (i).

Exemple 120. 1) Pour tout $n \geq 2$ on a $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente (voir exercice 100), le critère de comparaison permet d'en déduire que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.
2) Pour tout $n \geq 1$ on a $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Comme la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, on en déduit que la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

Théorème 121. *(Critère d'Equivalence)*
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries a termes strictement positifs.
Si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \neq 0$ et $\neq +\infty$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Preuve : Pour $0 < \varepsilon < l$, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $\left|\frac{u_n}{v_n} - l\right| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire

$$-\varepsilon \leq \frac{u_n}{v_n} - l \leq \varepsilon,$$

$$l - \varepsilon \leq \frac{u_n}{v_n} \leq l + \varepsilon,$$

$$0 < (l-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (l+\varepsilon)v_n.$$

On applique ensuite le critère de comparaison.

Remarque 122. i) Si $l = 0$, on a $0 < u_n \leq \varepsilon v_n$ à partir d'un certain rang n_0.
D'où, si $\sum v_n$ converge , alors $\sum u_n$ converge.
ii) Si $l = +\infty$, on a $0 < \varepsilon v_n \leq u_n$ à partir d'un certain rang n_0.
D'où, si $\sum u_n$ converge , alors $\sum v_n$ converge aussi.
iii) Deux séries dont les termes généraux sont équivalents sont de même nature mais n'ont pas la même somme. En effet, nous avons $\frac{1}{n(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.
Cependant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Exemple 123. 1) la série $\sum \frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n})$ est convergente car $\frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente.
2) la série $\sum \frac{1+2^{n+3}}{n+5^{n+1}}$ est convergente car $\frac{1+2^{n+3}}{n+5^{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{8}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ et $\sum \left(\frac{2}{5}\right)^n$ est une série géométrique convergente.

Exercice 124. Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} \ln(1+e^{-n}), \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{(2n+2)^2}{(3n^2+4n+1)^4}, \qquad \sum_{n\geq 1} (1-\frac{1}{n})^n, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{ne^{\frac{1}{n}}-n}{n^3+1}.$$

Théorème 125. *(Critère de Comparaison avec une Intégrale)*
Soit $f\colon [n_0, \infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue, décroissante et positive.
Alors la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature. Et si l'intégrale $\int_{n_0}^{\infty} f(t)\,dt$ converge, alors pour tout $n > n_0$, on a :

$$\int_{n}^{\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \leq \int_{n-1}^{\infty} f(t)\,dt.$$

Les deux resultats suivants sont des applications directes du critère ci-dessus, ces résultats traitent de séries qui serviront de référence pour appliquer les règles de comparaison et d'équivalence

Théorème 126. *(Convergence d'une série de Riemann)*
La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ dite de Riemann est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple 127. 1) la série $\sum \frac{4n}{(2n+1)(2n^4+1)}$ est convergente car $\frac{4n}{(2n+1)(2n^4+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^4}$ et $\sum \frac{1}{n^4}$ est une série de Riemann convergente.
2) la série $\sum \sin(\frac{2}{2n^6+1})$ est convergente car $\sin(\frac{2}{2n^6+1}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{2n^6+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^6}$ et $\sum \frac{1}{n^6}$ est une série de Riemann convergente.

Exercice 128. Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin x}\, dx, \qquad \sum_{n\geq 1} \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^3-2x}\, dx.$$

Proposition 28. *(Séries de Bertrand)*
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\sum \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ converge *si et seulement si* $(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

Preuve : Pour $(\alpha < 0)$ ou $(\alpha = 0$ et $\beta < 0)$, la série diverge car son terme général ne tend pas vers 0.
Supposons $(\alpha > 0)$ ou $(\alpha = 0$ et $\beta > 0)$. Alors, la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$$

est positive et décroissante sur un intervalle $[a, +\infty[$. La comparaison avec l'intégrale de Bertrand permet de conclure.

Exemple 129. la série $\sum \frac{4n}{(2n^2+1)(2\ln(n^4+1)+\sin n)}$ est divergente car $\frac{4n}{(2n^2+1)(2\ln(n^4+1)+\sin n)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4n\ln n}$ et $\sum \frac{1}{4n\ln n}$ est une série de Bertrand divergente.

Proposition 29. *(Règle de Riemann)*

1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$ $(l < +\infty)$ alors la série de terme général u_n converge.
2. S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l > 0$ alors la série de terme général u_n diverge.

Exemple 130. 1) la série $\sum \frac{1}{\ln(n^2+1)}$ est divergente, en effet, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\frac{1}{\ln(n^2+1)} = +\infty$. Donc, d'après les règles de Riemann $(\alpha = \frac{1}{2} < 1)$ cett série est divergente.
2) la série $\sum ne^{-n^2+1}$ est convergente. En effet, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3(ne^{-n^2+1}) = 0$, alors, les règles de Riemann $(\alpha = 3 > 1)$ entraine que cett série converge.

Exercice 131. Étudier la nature des séries suivantes

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)^n, \qquad \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}.$$

Théorème 132. *(Règle de Cauchy)*
Soit $\sum u_n$ une série numérique telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l,$$

alors

1. si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument,
2. si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. si $l = 1$, on ne peut conclure sauf si $l = 1^+$ et dans ce cas $\sum u_n$ diverge.

Preuve : 1) Supposons $l < 1$ et soit a tel que $l < a < 1$. Il n'existe qu'un nombre fini d'entiers n tels que $\sqrt[n]{|u_n|} > a$. On peut donc trouver un entier N (dépendant de a) tel que

$$n > N \Rightarrow \sqrt[n]{|u_n|} < a.$$

À partir de ce rang N, on a alors $|u_n| < a^n$, ce qui permet de conclure.
2) Si $l > 1$, il existe une infinité d'entiers n tels que $\sqrt[n]{|u_n|} > 1$, donc $|u_n| > 1$. Le terme général de la série ne tend pas vers 0, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Exemple 133. Pour la série de terme général $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$, on a pour tout $n \geq 1$:

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)},$$

et pour n suffisamment grand :

$$\sqrt[n]{u_n} = e^{n\left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-1+o(1)},$$

on a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = e^{-1}$. Comme $e^{-1} < 1$, on conclut que la série $\sum (1 - \frac{1}{n})^{n^2}$ converge.

Théorème 134. *(Règle de d'Alembert)*
Soit $\sum u_n$ une série à termes réels non nuls à partir d'un certain rang. On pose

$$l = \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|.$$

Alors

1. si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument,
2. si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. si $l = 1$, on ne peut conclure sauf si $l = 1^+$ et dans ce cas $\sum u_n$ diverge.

Preuve : Elle est analogue à celle de la règle de Cauchy, en remplaçant $\sqrt[n]{|u_n|}$ par $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.

Exemple 135. Pour la série de terme général $u_n = \frac{a^n}{n}$, où $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = a\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a.$$

Il en résulte que $\sum \frac{a^n}{n}$ converge si $a < 1$ et diverge si $a > 1$. Si $a = 1$, on a $u_n = \frac{1}{n}$ et on sait que la série harmonique diverge.

Exercice 136. Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(\ln n)^n}, \qquad \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!}, \qquad \sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} a^{2n}, \qquad \sum_{n \geq 1} \left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n \text{ où } \quad a > 0 \quad \text{et} \quad p \geq 0.$$

4.3 Séries à Termes Réels de Signe Quelconques

Définition 26. *On appelle série alternée toute série de terme général* $(-1)^n a_n$ *où* a_n *est une suite réelle de signe constant.*

Pour de telles séries, on a le résultat remarquable suivant.

Théorème 137. *(Théorème Spécial des Séries Alternées)*
Soit (a_n) une suite à termes positifs, décroissante et tendant vers 0, alors la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ converge. De plus, sa somme S vérifie $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ pour tout n, et son reste R_n d'ordre n vérifie $R_n \leq a_{n+1}$.

Preuve : on considère la suite des sommes partielles S_n. On prouve que S_{2n} et S_{2n+1} sont adjacentes, puis, on en déduit la convergence de S_n.

Exemple 138. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ la série $\sum(-1)^{n-1}n^{-\alpha}$ est alternée et la suite de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est décroissante et tend vers 0. D'après le théorème spécial des séries alternées la série $\sum(-1)^{n-1}n^{-\alpha}$ est donc convergente. Et on a :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

Exercice 139. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge et que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ diverge.

Le prochain théorème est une profonde généralisation du théorème spécial des séries alternées.

Théorème 140. *(Critère d'Abel)*
Soit (a_n) une suite décroissante de réels qui converge vers 0. Soit (b_n) une suite de réels telle que les sommes partielles de la série de terme général b_n soient bornées. Alors, la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

Exemple 141. Si (α_n) est une suite de réels, décroissante et de limite 0, alors les séries

$$\sum_n \alpha_n \cos(n\alpha), \qquad \sum_n \alpha_n \sin(n\alpha)$$

sont convergentes. En particulier, ces deux séries de Fresnel :

$$\sum_n \frac{\cos n}{n^\alpha}, \qquad \sum_n \frac{\sin n}{n^\alpha}$$

sont convergentes pour tout $\alpha > 0$.

4.3.1 Produit de Cauchy

Définition 27. Étant donné deux séries u_n, v_n, on définit leur série produit comme la série de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Exemple 142. On considère les séries de termes généraux :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}.$$

Ces deux séries vérifient les hypothèses du critère spécial des séries alternées, donc elles convergent. Leur série produit a pour terme général

$$w_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{\ln(n-k+2)}.$$

Donc,

$$|w_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{\ln(n-k+2)} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \frac{1}{\ln(n+2)} = \frac{\sqrt{n+1}}{\ln(n+2)}.$$

Par conséquent, la suite (w_n) ne tend vers 0, et la série produit $\sum w_n$ est divergente. Cet exemple montre en particulier que le produit de Cauchy de deux séries convergentes peut être une série divergente !

Théorème 143. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques convergentes, de somme S et T respectivement. Supposons que l'une au moins de ces deux séries soit absolument convergente. Alors la série produit est convergente et a pour somme le nombre ST. Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, la série produit aussi est absolument convergente.

Exercice 144. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a| < 1$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n = \frac{1}{(1-a)^2}.$$

(Indication : prendre $u_n = v_n = a^n$).

4.4 Exercices

Exercice 1. Établir la convergence et déterminer la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{2}{n^2-1}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{2^{n+2}}{e^{2n}}, \qquad \sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right).$$

Exercice 2. Étudier la nature des séries $\sum u_n$ avec :

$$u_n = \frac{1-\sin n}{1+n\sqrt{n}}, \qquad u_n = \frac{e^n - 1}{\sqrt{n}}, \qquad u_n = e^{-\sqrt{2+n}},$$

$$u_n = 1 - \cos(\frac{1}{n^2}), \qquad u_n = \frac{n^2}{2^n + n}, \qquad u_n = \frac{a^n n!}{n^n} \quad (a > 0),$$

$$u_n = \left(\frac{n^2-3n+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}, \qquad u_n = \sin(2\pi\sqrt{n^2+(-1)^n}), \qquad u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}}\, dx.$$

Exercice 3. Étudier la convergence et la convergence absolue des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \sqrt{n} \sin(\frac{1}{n}), \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} e^{-\frac{\ln(n)}{n}}.$$

Chapitre 5

Suites de Fonctions

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$.

5.1 Convergence d'une Suite de Fonctions

5.1.1 Convergence Simple

Définition 28. On dit que (f_n) **converge simplement** vers f sur I si, pour chaque $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$. En d'autres termes,

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On dit alors que f est **la limite simple** sur I de la suite de fonctions (f_n), et on note :

$$f_n \xrightarrow{C.S} f.$$

Il est clair que la fonction limite f est unique puisque, pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))$ a une limite unique.

Exemple 145. 1- $I = \mathbb{R}, f_n(x) = x(1 - \frac{1}{n})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x(1 - \frac{1}{n}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$. Donc, (f_n) converge simplement vers $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.

2- $I = \mathbb{R}, g_n(x) = x - \frac{\sin x}{nx}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - \frac{\sin x}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$. Donc, (g_n) converge simplement vers $g(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.

3- $I = \mathbb{R}^+, h_n(x) = e^{-nx} \sin(2nx)$. Pour $x = 0$, on a $h_n(0) = 0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, et pour $x > 0$ on a $h_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $|h_n(x)| \leq e^{-nx}$. Donc, (h_n) converge simplement vers $h(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

4- $I = [0; 1], l_n(x) = x^n$. Pour $x = 1$ on a $l_n(1) = 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, et pour $0 \leq x < 1$ on a $l_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc, (l_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $l : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$l(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \in [0, 1[\\ 1 & \text{pour} \quad x = 1 \end{cases}$$

On observe sur ce dernier exemple que toutes les fonctions l_n sont de classe C^∞ sur $[0, 1]$ alors que la fonction l n'est même pas continue !

Dans la définition ci-dessus, l'entier N dépend, en général, de ε et de x. Cela nous amènera parfois à noter $N(\epsilon, x)$ au lieu de N.
En exigeant que N soit indépendant de x, on obtient un mode de convergence plus restrictif, appelé convergence uniforme.

5.1.2 Convergence Uniforme

Définition 29. On dit que (f_n) **converge uniformément** vers f sur I si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

On dit aussi que f est **la limite uniforme** de f_n et on note :

$$f_n \xrightarrow{C.U} f.$$

Remarque 146. 1- la convergence uniforme de la suite (f_n) vers f signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N à partir duquel le graphe de f_n est contenu dans la partie du plan xOy définie par $x \in I$ et $y \in [f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon]$. Autrement dit, il existe un rang à partir duquel le graphe de f_n est compris entre le graphe de $f - \varepsilon$ et celui de $f + \varepsilon$.

2- En pratique, on commence par déterminer la limite simple f (si on a convergence uniforme vers f alors f est la limite simple de la suite), et on étudie l'écart $|f_n - f|$ sur I en le majorant par une suite qui tend vers 0, ou si cela n'est pas immédiat, en étudiant les variations de $|f_n - f|$ sur I.

Exemple 147. Reprenons l'exemple précédent :
1- La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$, car

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|x|}{n} = \infty \nrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

En revanche, la convergence est uniforme sur tout intervalle I borné de $\mathbb{R}$. En effet, soit $M > 0$ tel que $I \subset [-M, M]$. Alors,

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in I} \frac{|x|}{n} \leq \frac{M}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2- La convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$ car

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\sin x|}{n} = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3- La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$. En effet, On a $h'(x) = ne^{-nx}(\cos(nx) - \sin(nx))$, d'où, le premier zéro de la dérivée sur $\mathbb{R}^+$ se produit en $x = \frac{\pi}{4n}$, et il est facile de voir qu'il s'agit d'un maximum. Or,

$$h_n(\frac{\pi}{4n}) - h(\frac{\pi}{4n}) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}} \nrightarrow 0.$$

Donc, la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
4- D'après la proposition de continuité suivante, la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

Propriété 1. Si la suite (f_n) converge uniformément vers f, alors f_n converge simplement vers f.

Preuve : La démonstration découle immédiatement des définitions.

Exercice 148. Étudier sur $\mathbb{R}^+$ la convergence simple et uniforme des suite de fonctions suivantes :

$$f_n(x) = n^2 x e^{-nx}, \qquad g_n(x) = \frac{x}{x^2+n}, \qquad h_n(x) = x e^{\frac{x}{n}}.$$

5.2 Propriétés de la Convergence Uniforme

Etant donné une suite de fonctions (f_n) dont on connaît les propriétés : (f_n) continue, intégrable ou dérivable, pour tout n, peut-on affirmer que la fonction limite f de (f_n) est elle même continue, intégrable ou dérivable ?

5.2.1 Convergence Uniforme et Continuité

Théorème 149. Soit (f_n) une suite de fonctions **continues** et **convergeant uniformément** sur I vers une fonction f, alors f est continue sur I.

Preuve. Soit $a \in I$ et $\varepsilon > 0$. La convergence uniforme de (f_n) sur I vers f montre que :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, \quad \text{on ait} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

f_N étant continue en a, il vient :

$$\exists \eta > 0 : x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I \Longrightarrow |f_N(x) - f_N(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour montrer la continuité de f, il faut montrer que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$, on a :

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \leq \epsilon,$$

donc f est continue en a. Comme a étant arbitraire dans I, alors f est continue sur I.

Remarque 150. 1- Ce théorème se traduit en disant que "la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue".
2- Par contraposée, si les fonctions f_n sont continues sur I et la fonction f ne l'est pas, alors la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f.

Exemple 151. La suite (f_n) définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n = e^{-nx}$ converge simplement vers la fonction f définie par $f(x) = 0$ pour $x > 0$ et $f(0) = 1$. Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$, et f ne l'est pas. La convergence de la suite (f_n) vers f n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 152. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \sin(nx^2)\exp(-nx^2) + \sqrt{1-x^2}.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1,1]$ vers une fonction f qu'on déterminera.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.
3. Montrer que $\forall a > 0$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,1]$.

5.2.2 Convergence Uniforme et Intégration

Théorème 153. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $[a,b]$ telle que
1- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $[a,b]$.
2- La suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f.
Alors
1- f est intégrable sur $[a,b]$.
2-
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$
3- La suite $g_n(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)dt$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

Remarque 154. Ce théorème montre qu'on peut échanger l'intégration et le passage à la limite, lorsque la suite de fonctions intégrables (f_n) convergent uniformément vers f.

Exercice 155. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \sin^n(x)(1-\sin(x))\,dx = 0$.

5.2.3 Convergence Uniforme et Dérivation

Théorème 156. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $[a,b]$ telle que
1- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
2- (f_n) converge simplement sur $[a,b]$, (Ou il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = l \in \mathbb{R}$.)
3- La suite (f_n') converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction g.
Alors
1- La suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction f définie par :
$$f(x) = l + \int_{x_0}^x g(t)dt$$
2- f est dérivable sur $[a,b]$ et l'on a : $f' = g$.

Exercice 157. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définies par :
$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

1. Montrer que cette suite converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.
2. Étudier la convergence de (f_n') sur $[-1,1]$.
3. On considère la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[-1,1]$ par :
$$g_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}.$$
Montrer que (g_n) converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.

5.3 Exercices

Exercice 1. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les suites de fonctions réelles définies par
$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} + \arctan(x) \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{nx}{1+nx}.$$

1. Ces suites convergent-elles simplement sur $[0,1]$?
2. Convergent-elles uniformément sur $[0,1]$? Sur $]0,1]$? Convergent-elles uniformément sur $[1/2,1]$?
3. Convergent-elles simplement et uniformément sur $[1,+\infty[$?

Exercice 2. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$.

Exercice 4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+2^n n x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions sur $[0,1]$.
2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.
3. Donner une démonstration directe de ce que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.

Chapitre 6

Séries de Fonctions

6.1 Les Quatre Modes de Convergence

Soit D un ensemble dans $\mathbb{R}$, et soit $(f_n(x))_n$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$. On veut définir la somme infinie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

6.1.1 Définition

Définition 30. A partir de la suite de fonctions $(f_n(x))$, on peut définir une nouvelle suite de fonctions $(S_n(x))_n$ par :

$$\begin{array}{rcl} S_0(x) & = & f_0(x) \\ S_1(x) & = & f_0(x) + f_1(x) \\ . & = & . \\ . & = & . \\ S_n(x) & = & f_0(x) + ... + f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \end{array}$$

On appelle série de fonctions la suite de fonctions $(S_n(x))$.
On note en général la série par $\sum f_n(x)$.
$f_n(x)$ est le terme général de la série.
$S_n(x)$ est la suite des sommes partielles.

6.1.2 Convergence Simple d'une Série de Fonctions

Définition 31. On dit que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ *converge simplement* sur D si et seulement si la suite des sommes partielles associée $(S_n(x))$, où $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, converge simplement sur D. Si on appelle $S(x)$ la limite simple de $(S_n(x))$, alors on a :

$$\forall x \in D; \forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N; \quad |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

$S(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x)$ est appelée somme de la série $\sum f_n(x)$.

Remarque 158. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge simplement sur D. Notons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = S(x) - S_n(x)$ le reste d'ordre n de la série. Alors

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0, \quad \forall x \in D.$$

Exemple 159. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$.
Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x + n > 0$ et en particulier $n + x \neq 0$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ existe. D'autre part, $\sum \frac{(-1)^n}{x+n}$ est une série alternée. Donc, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge sur $]0, +\infty[$ en vertu du théorème spécial des séries alternées (TSSA).

6.1.3 Convergence Absolue d'une Série de Fonctions

Définition 32. Une série $\sum f_n(x)$ est dite *absolument convergente* sur D si et seulement si pour chaque $x \in D$, la série $\sum |f_n(x)|$ est convergente sur D.

Corollaire 5. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur D, alors elle converge simplement sur D.

Remarque 160. La réciproque est fausse. Une série de fonctions peut converger simplement sans être absolument convergente

Exemple 161. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$.
Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{(-1)^n}{x+n}\right| = \frac{1}{x+n}$. Comme $\frac{1}{x+n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} > 0$ et que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, on en déduit que la série $\sum f_n$ n'est pas absolument convergente sur $]0, +\infty[$ (mais converge simplement sur $]0, +\infty[$).

Exemple 162. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}$.
Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{(-1)^n}{(x+n)^2}\right| = \frac{1}{(x+n)^2}$. Comme $\frac{1}{(x+n)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} > 0$ et que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que la série $\sum f_n$ converge absolument sur $]0, +\infty[$ et en particulier converge simplement sur $]0, +\infty[$.

6.1.4 Convergence Uniforme d'une Série de Fonctions

Définition 33. On dit que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ *converge uniformément* sur D si et seulement si la suite des sommes partielles associée $(S_n(x))$, où $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, converge uniformément sur D. Si on appelle $S(x)$ la limite simple de $(S_n(x))$, alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall x \in D; \forall n \geq N; \quad |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

la convergence uniforme sur D s'écrit aussi :

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in D} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

est appelée somme de la série $\sum f_n(x)$.

Remarque 163. La série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur D si et seulement si la suite de fonctions (R_n) converge uniformément vers 0 sur D.

Corollaire 6. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur D, alors elle converge simplement sur D.

Exemple 164. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$.
On sait déjà que la série $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ sur $]0, +\infty[$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x > 0$, la suite $\left(\frac{(-1)^n}{x+n}\right)$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. D'après le TSSA, on a

$$\forall x > 0; |S_n(x) - S(x)| = |R_n(x)| \leq |a_{n+1}(x)| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{x+n+1}\right| = \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in]0,+\infty[} |S_n(x) - S(x)| = 0.$$

Ceci montre que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ vers la fonction f.

Remarque 165. Pour $x > 0$ fixé, la série numérique de terme général $\frac{(-1)^n}{x+n}$ ne converge pas absolument mais converge uniformément sur $]0, +\infty[$. Ceci montre que la convergence uniforme n'entraine pas la convergence absolue.

Remarque 166. Pour démontrer la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général f_n sur D, on majore $|R_n(x)|, x \in D$, par une expression indépendante de x, dépendant de n et tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

6.1.5 Convergence Normale d'une Série de Fonctions

Définition 34. La série $\sum f_n$ est dite *normalement convergente* sur D s'il existe une série numérique $\sum v_n$ convergente telle que

$$\forall x \in D, \quad |f_n(x)| \leq v_n.$$

Propriété 2. Si $\sum f_n$ converge normalement sur D, alors elle converge uniformément sur D.

Remarque 167. En pratique : on essaie d'abord de prouver la convergence normale. Pour cela, on cherche un majorant v_n de $|f_n|$ tel que la série numérique $\sum v_n$ converge (si on ne trouve pas un majorant de manière simple, on étudie les variations de f_n).

Exemple 168. 1) $D = \mathbb{R}; f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3+x^2}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^3 + x^2} \leq \frac{1}{n^3} = v_n,$$

La série $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, donc la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge normalement sur D.
2) $D = \mathbb{R}^+$; $f_n(x) = x^n e^{-nx}$. Montrons que la série $\sum f_n$ converge normalement sur D. Etudions les variations de f_n sur D. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^+; \quad f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-nx} - nx^n e^{-nx} = x^{n-1}(1-x)e^{-nx},$$

d'où $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1$, ainsi f est croissante sur $[0,1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$. Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}^+; |f_n(x)| \leq e^{-n} = v_n$. Or $\sum v_n$ est une série convergente car $\sqrt[n]{e^{-n}} = e^{-1} < 1$ (critère de Cauchy), alors $\sum f_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.

6.2 Les Grands Théorèmes

6.2.1 Le Théorème d'Interversion des Limites

Théorème 169. Soient $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$, S une fonction définie sur D et $a \in \overline{D}$.
On suppose que :
1) La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur D vers la fonction S.
2) Chaque fonction f_n a une limite l_n quand x tend vers a.
Alors,
1) La série numérique $\sum l_n$ converge.
2) La fonction S a une limite l quand x tend vers a.
3) $l = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$ ou encore, plus explicitement,

$$\lim_{x \to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

Remarque 170. Ce théorème est encore valable si $a = \pm\infty$.

Exemple 171. Pour $n \in \mathbb{N}$, et $x > 0$, poson $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$. On a vu que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.
De plus, chaque fonction f_n a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$ à savoir 0.
D'après le théorème d'interversion des limites,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \right) = 0.$$

De même, la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $T : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$. De plus, $\forall n \geq 1$, $\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$. On en déduit que

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x \to 0^+} \frac{(-1)^n}{x+n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = cte.$$

D'autre part, pour tout $x > 0$, on a $S(x) = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$, d'où $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} S(x) = +\infty$.

6.2.2 Continuité de la Somme d'une Série de Fonctions

Théorème 172. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur D et telle que :
1) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur D.
2) La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur D vers sa somme S.
Alors, S est aussi continue sur I.

Remarque 173. Comme résultat de ce théorème de continuité, on a :

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Exemple 174. On a vu que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. De plus, chaque fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$. Donc, f est une fonction continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice résolu 175. Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$$

1. Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que S est continue.
3. Étudier la monotonie de S.
4. Déterminer la limite en $+\infty$ de S.

Solution :

1. Soit $x \in]0; +\infty[$. On a $f_n(x) \sim \frac{1}{n^2 x}$ donc $\sum f_n(x)$ converge absolument. On en déduit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ et donc la fonction
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$$
est bien définie.
2. Les f_n sont continues sur $]0; +\infty[$. Soit $a > 0$,
$$\sup_{x\in[a;+\infty[} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n + n^2 a} \sim \frac{1}{n^2}$$
donc la série $\sum f_n(x)$ converge normalement sur $[a; +\infty[$, par conséquent, elle converge uniformément sur tout segment de $]0; +\infty[$. On peut donc conclure que S est continue.
3. Tous les f_n sont décroissantes sur $]0; +\infty[$, il en est de même de la somme S.
4. Puisque la convergence est uniforme sur l'intervalle $[1; +\infty[$, on peut appliquer le théorème d'interversion limite-série et on a
$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty} f_n(x)\right) = 0.$$

6.2.3 Intégration Terme à Terme

Théorème 176. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur $[a, b]$ vérifiant :
1- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $[a, b]$.
2- La série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers sa somme S.
Alors
1- S est intégrable sur $[a, b]$.
2-
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\ dt\right) = \int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ dt\right) = \int_a^b S(t)\ dt.$$
3- La série de fonction $\sum\left(\int_a^x f_n(t)\ dt\right)$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers $\int_a^x S(t)\ dt$.

Exemple 177. On sait que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$: $\quad \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \frac{1}{2}]$, on a $|f_n(x)| := |x^n| \leq \dfrac{1}{2^n} = v_n$.
Donc, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement (car la série $\sum \frac{1}{2^n}$ est convergente) et en particulier uniformément sur le segment $[0, \frac{1}{2}]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme, on a :
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\ dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\ dx\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^n\ dx\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}.$$
Avec $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\ dx = \ln 2$, on obtient $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \ln 2$.

Exercice résolu 178. Soit
$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right)$$
Justifier et calculer
$$\int_0^1 \psi(x)\ dx$$

Solution : On a $\psi(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2-x^2}$. Or pour $x \in [0, 1]$, on a $|\frac{2x}{n^2-x^2}| \leq \frac{2}{n^2-1}$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{2x}{n^2-x^2}$ est normalement convergente. Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme on peut permuter l'intégrale et la somme, c-à-d
$$\int_0^1 \psi(x)\ dx = \int_0^1\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right)\right)\ dx = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\int_0^1 \frac{1}{n-x}\ dx - \int_0^1 \frac{1}{n+x}\ dx\right)$$
Or
$$\sum_{n=2}^{N}\left(\int_0^1 \frac{1}{n-x}\ dx - \int_0^1 \frac{1}{n+x}\ dx\right) = \sum_{n=2}^{N}\left(ln(\frac{n}{n-1}) - ln(\frac{n+1}{n})\right) = ln(N) - ln(N+1) + ln(2)$$
Alors
$$\int_0^1 \psi(x)\ dx = \lim_{N\to\infty} (ln(N) - ln(N+1) + ln(2)) = ln(2).$$

6.2.4 Dérivation Terme à Terme

Théorème 179. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur D telles que :
1- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
2- Il existe $x_0 \in D$ tel que la série numérique $\sum f_n(x_0)$ converge.
3- La série $\sum f_n'$ converge uniformément sur D.
Alors
1- La série $\sum f_n$ converge uniformément sur D.
2- Sa somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et on a :

$$\forall x \in D, \quad S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$

Exemple 180. Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$. La série $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.
Chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et on a $f_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$.
La série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ car elle converge normalement ($|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2}$).
Donc, d'après le théorème de dérivation terme à terme, la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$, sa somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}.$$

<u>Exercice résolu</u> 181. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1, 1[$.
2. Calculer $f'(x)$.

Solution : Pour $x \in]-1, 1[$ et n entier naturel non nul, posons $f_n(x) = \dfrac{x^n \sin(nx)}{n}$.
Soit $x \in]-1, 1[$. Pour n entier naturel non nul, $|f_n(x)| \leq |x|^n$. Or, la série géométrique de terme général $|x|^n$, $n \geq 1$, est convergente et donc la série numérique de terme général $f_n(x)$ est absolument convergente et en particulier convergente. On en déduit que $f(x)$ existe.

$$f \text{ est définie sur }]-1, 1[.$$

Soit $a \in]0, 1[$. Chaque f_n, $n \geq 1$, est de classe C^1 sur $[-a, a]$ et pour $x \in [-a, a]$,

$$f_n'(x) = x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx).$$

Pour $x \in [-a, a]$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|f_n'(x)| \leq a^{n-1} + a^n \leq 2a^{n-1}.$$

Puique la série numérique de terme général $2a^{n-1}$, $n \geq 1$, converge, la série de fonctions de terme général f_n', $n \geq 1$, est normalement et donc uniformément sur $[-a, a]$.
En résumé,

— la série de fonctions de terme général f_n, $n \geq 1$, converge simplement vers f sur $[-a, a]$,
— chaque fonction f_n, $n \geq 1$, est de classe C^1 sur $[-a, a]$,
— la série de fonctions de terme général f_n' converge uniformément sur $[-a, a]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, f est de classe C^1 sur $[-a, a]$ pour tout réel a de $]0, 1[$ et donc sur $]-1, 1[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme.

$$f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]-1,1[\text{ et } \forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (x^{n-1}\sin(nx) + x^n \cos(nx)).$$

6.3 Exercices

Exercice 1. Etudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ dans les cas suivants :

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$, sur $[0, +\infty[$, puis sur $]1, +\infty[$, puis sur $[2, +\infty[$.
2. $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2}$, sur $[0, +\infty[$ puis sur $[0, 50]$.
3. $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{n^2+x^2}$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2. Étudier la convergence simple, uniforme et puis normale; sur l'intervalle I ; des séries de fonctions de termes généraux :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}, \quad I = \mathbb{R}^+, \qquad \text{et} \qquad g_n(x) = \begin{cases} x^{2n}\ln x & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases} \quad I = [0,1].$$

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par

$$f(x) = 1 + \sin(2x) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(mx)}{m^4}.$$

1. Montrer que cette fonction est bien définie, c'est à dire que la série converge simplement sur $[0, \pi]$.
2. Converge-t-elle uniformément ?

Exercice 4. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.

1. Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. montrer que sa somme $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est une fonction continue.

3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^4}$.
4. Montrer que $\displaystyle f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. On considère la série de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ de terme général :

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{\sqrt{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que pour tout $a > 0$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, mais pas sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que la somme de cette série est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 6. On considère la fonctions f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}.$$

1. Quel est le domaine de définition Δ de la fonction f.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Delta \setminus \{0\}$.

Exercice 7. On considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec

$$f_n(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_n(x) = \frac{x^n \ln x}{n} \quad \text{si} \quad n > 0$$

1. Montrer que cette série converge normalement sur $[0, 1]$, et en déduire

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

2. Calculer la somme de cette dernière série sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\, dx$ converge et que $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\, dx = 1 - \frac{\pi^2}{6}$.

Bibliographie

[1] Mohammed El Amrani, Suites et séries numériques Suites et séries de fonctions, Ellipes, ISBN 978-2-7298-70393.

[2] B. Beck, I. Selon et C. Feuillet, Maths MP Tout en un, Hachette Éducation, 2006.

[3] Jean-Yves Briend, Petit traité d'intégration, EDP Sciences, 2014.

[4] N.Piskounov, Calcul Différentiel et Intégral. Tome II. Edition Mir.(1980)Moscou.

[5] J.Dixmier, Cours de mathématiques du premier cycle. 2^{me} année. Edition Bordas, Paris 1977.

[6] B.Calvo, J.Doyen, A.Calvo, F.Boschet, Exercices d'analyse. 1^{er} cycle scientifique préparation aux grandes écoles.2^{me} Année. Edition Armand Colin, Paris1971.